Centres des magmas naturels sur $\mathscr{P}(E \times E)$ et E^E

Christian V. Nguembou Tagne

19 juin 2021

L'ensemble des relations binaires sur un ensemble est muni d'une loi de composition naturelle. La restriction de cette loi à l'ensemble des applications de cet ensemble dans lui-même est la composition des applications. Deux magmas sont ainsi définis par cette loi de composition. Dans cette note, nous déterminons le centre de chacun de ces magmas.

1. Centre du magma sur l'ensemble des relations binaires

Soit E un ensemble. Pour tout couple (A, B) de parties de $E \times E$, une autre partie de $E \times E$, notée $A \circ B$ et appelée **composée** de B par A, est définie par $(x, z) \in A \circ B$ s'il existe un élément y de E tel que $(x, y) \in A$ et $(y, z) \in B$. Une loi de composition interne est ainsi définie sur l'ensemble $\mathscr{P}(E \times E)$ des parties de $E \times E$.

Dans cette section, nous démontrons le résultat suivant.

Proposition 1.

Soit E un ensemble non vide. Alors, le **centre** $\mathscr{C}$ du magma $\big(\mathscr{P}(E \times E), \circ\big)$ est formé de $\emptyset$ et de la diagonale D de $E \times E$.

Démonstration :

Soit A une partie quelconque de $E \times E$. Nous supposons que le composé $\emptyset \circ A$ contient un couple $(x, z) \in E \times E$. Alors, il existe un $y \in E$ tel que $(x, y) \in \emptyset$ et $(y, z) \in A$: une contradiction de la définition de l'ensemble vide. La supposition est donc fausse. Autrement dit, $\emptyset \circ A = \emptyset$. Un raisonnement analogue permet d'établir que $A \circ \emptyset = \emptyset$. Par conséquent, $\emptyset \circ A = A \circ \emptyset$ pour chaque $A \in \mathscr{P}(E \times E)$. Ceci signifie que $\emptyset$ appartient au centre $\mathscr{C}$ du magma $\big(\mathscr{P}(E \times E), \circ\big)$.

Maintenant, nous allons montrer que la diagonale $D = \Big\{(x,x) \mid x \in E\Big\}$ appartient également à $\mathscr{C}$. Dans cette intention, soit A une partie de $E \times E$.

Si $(x,z) \in D \circ A$, alors il existe un élément y de E tel que $(x,y) \in D$ et $(y,z) \in A$. Cependant, la relation $(x,y) \in D$ entraîne $x = y$. De ce fait, si $(x,z) \in D \circ A$, alors $(x,z) \in A$, et donc $(x,z) \in A \circ D$, car $(z,z) \in D$. Ainsi, $D \circ A \subset A \circ D$.

Si par ailleurs $(x,z) \in A \circ D$, alors il existe un élément y de E tel que $(x,y) \in A$ et $(y,z) \in D$. Cette dernière relation induit $y = z$. Donc, $(x,z) \in A \circ D$ entraîne $(x,z) \in A$, puis $(x,z) \in D \circ A$, en raison de l'appartenance de (x,x) à D. Par conséquent, $A \circ D \subset D \circ A$.

Tout compte fait, $A \circ D = D \circ A$ pour toute partie de A de $E \times E$. La diagonale D appartient donc au centre $\mathscr{C}$ du magma $\Big(\mathscr{P}(E \times E), \circ\Big)$. D'où $\Big\{\emptyset, D\Big\} \subset \mathscr{C}$.

Pour conclure la démonstration, nous allons prouver que D est l'unique partie non vide de $E \times E$ appartenant à $\mathscr{C}$. À cet effet, nous considérons une partie P non vide de $E \times E$ telle que $P \in \mathscr{C}$.

Soit $(x,z) \in P$. Alors, $(x,x) \in P \circ \big\{(z,x)\big\}$. Cependant, $P \circ \big\{(z,x)\big\} = \big\{(z,x)\big\} \circ P$. Ainsi, $(x,x) \in \big\{(z,x)\big\} \circ P$. Il existe donc un élément y de E tel que $(x,y) \in \big\{(z,x)\big\}$ et $(y,x) \in P$. Ceci entraîne $(x,y) = (z,x)$. Ainsi, $x = z$ et $(x,z) \in D$. Par conséquent, $P \subset D$.

Donc, P est une partie non vide de la diagonale D. Soit $(x,x) \in P$, puis z un élément quelconque de E. Alors, $(x,z) \in P \circ \big\{(x,z)\big\} = \big\{(x,z)\big\} \circ P$. Il existe de ce fait un $y \in E$ tel que $(x,y) \in \big\{(x,z)\big\}$ et $(y,z) \in P$. D'où $y = z$ et $(z,z) \in P$. Il en résulte que $(z,z) \in P$ pour chaque $z \in E$. Ceci entraîne $D \subset P$, et par conséquent $P = D$.

La diagonale D est donc l'unique partie non vide de $E \times E$ appartenant au centre $\mathscr{C}$ du magma $\Big(\mathscr{P}(E \times E), \circ\Big)$. De ce fait, $\mathscr{C} = \Big\{\emptyset, D\Big\}$. □

2. Centre du magma sur l'ensemble des applications d'un ensemble dans lui-même

Dans cette section, nous désignons par E^E l'ensemble des applications de E dans E, et démontrons le résultat suivant.

Proposition 2.

Soit E un ensemble non vide. Alors, le **centre** du magma $\Big(E^E, \circ\Big)$ est réduit à l'application identique id_E.

Démonstration :

Par définition, $\mathrm{id}_E \circ f = f \circ \mathrm{id}_E = f$ pour toute application de E dans E. De ce fait, l'application identique id_E appartient au centre du magma $\Big(E^E, \circ\Big)$.

Pour tout élément x de E, nous désignons par g_x l'application constante de E dans E ayant pour image le singleton $\{x\}$. Maintenant, soit f un élément du centre du magma $\left(E^E, \circ\right)$. Alors, pour tout $x \in E$, nous avons $f \circ g_x = g_x \circ f$. Cependant,

$$(f \circ g_x)(x) = f\big(g_x(x)\big) = f(x) \qquad \text{et} \qquad (g_x \circ f)(x) = g_x\big(f(x)\big) = x.$$

Il en résulte que $f(x) = x$ pour chaque $x \in E$. Ceci signifie que $f = \mathrm{id}_E$. Par conséquent, l'application identique id_E est l'unique élément du centre du magma $\left(E^E, \circ\right)$. $\square$

Références

[1] N. Bourbaki, **Algèbre : Chapitres 1 à 3**, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007.

[2] N. Bourbaki, **Théorie des ensembles**, Springer, Berlin, Heidelberg, 2006.