Demi-treillis versus magmas associatifs et commutatifs de loi idempotente

Christian V. Nguembou Tagne

19 juin 2021

Une loi de composition $\top$ sur un ensemble E est dite **idempotente** si tous les éléments de E sont idempotents pour cette loi, c'est-à-dire si $x \top x = x$ pour tout $x \in E$.

Un **demi-treillis** est un ensemble partiellement ordonné tel que toute paire d'éléments de cet ensemble admette une borne supérieure.

Cette note est constituée de deux sections. Dans la première section, nous démontrons que toute loi de composition associative, commutative et idempotente définit un demi-treillis. La seconde section nous prouvons la réciproque de cette proposition ; à savoir que tout demi-treillis détermine un magma dont la loi est associative, commutative et idempotente.

1. Demi-treillis défini d'une loi associative, commutative et idempotente

Proposition 1.

Sur un ensemble E, soit $\top$ une loi de composition associative, commutative et idempotente. Alors, la relation $\leq$, définie par $x \leq y$ si $x \top y = y$, est une relation d'ordre dans E. Du reste, pour cette relation d'ordre $\leq$ sur E, toute paire constituée d'éléments x et y de E admet une borne supérieure égale à $x \top y$.

Démonstration :

Réflexivité. Soit $x \in E$. Alors, $x \top x = x$, car la loi $\top$ est idempotente. Ceci signifie que $x \leq x$.

Anti-symétrie. Soient x et y des éléments de E tels que $x \leq y$ et $y \leq x$. Alors, par définition, $x \top y = y$ et $y \top x = x$. Cependant, $y \top x = x \top y$, en raison de la commutativité de la loi $\top$. D'où $x = y$.

Transitivité. Soient x, y et z des éléments de E tels que $x \leq y$ et $y \leq z$. Alors, $x \top y = y$ et $y \top z = z$. Ainsi, $x \top z = x \top (y \top z)$. Par ailleurs, $x \top (y \top z) = (x \top y) \top z$, car la loi $\top$ est associative. Il en résulte que $x \top z = (x \top y) \top z = y \top z = z$. De ce fait, $x \leq z$.

Existence et valeur de la borne supérieure d'une paire. Soient x et y deux éléments quelconques de E. Alors, $x\top(x\top y) = (x\top x)\top y = x\top y$ et

$$y\top(x\top y) = (x\top y)\top y = x\top(y\top y) = x\top y.$$

D'où $x \leq x\top y$ et $y \leq x\top y$. Le composé $x\top y$ est donc un majorant de la paire $\{x, y\}$. Soit z tout autre majorant de cette paire. Alors, $x\top z = z$ et $y\top z = z$. Il en résulte que

$$(x\top y)\top z = x\top(y\top z) = x\top z = z,$$

et par conséquent $x\top y \leq z$. Donc, $x\top y$ est la borne supérieure de la paire $\{x, y\}$. □

2. Loi associative, commutative et idempotente déduite d'un demi-treillis

Nous prouvons ci-dessous la réciproque de la proposition 1.

Proposition 2.

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\leq$ telle que toute paire d'éléments de E admette une borne supérieure. Alors, la loi de composition définie sur E par $x\top y = \sup\{x, y\}$ est associative, commutative et idempotente.

Démonstration :

Associativité. Soient x, y et z des éléments de E. Alors,

$$x\top(y\top z) = \sup\Big\{x, y\top z\Big\} = \sup\Big\{x, \sup\{y, z\}\Big\}.$$

Ainsi, $x\top(y\top z)$ est un majorant de x et y d'une part, puis de z d'autre part. Ceci induit $\sup\{x, y\} \leq x\top(y\top z)$ et $z \leq x\top(y\top z)$. Donc, $\sup\Big\{\sup\{x, y\}, z\Big\} \leq x\top(y\top z)$, c'est-à-dire

$$(x\top y)\top z \leq x\top(y\top z). \tag{†}$$

Dans le même esprit, $(x\top y)\top z$ est un majorant de x d'une part, puis de y et z d'autre part. D'où $x \leq (x\top y)\top z$ et $\sup\{y, z\} \leq (x\top y)\top z$. Il s'ensuit que

$$\sup\Big\{x, \sup\{y, z\}\Big\} \leq (x\top y)\top z,$$

c'est-à-dire

$$x\top(y\top z) \leq (x\top y)\top z. \tag{††}$$

Compte tenu de l'anti-symétrie de $\leq$, les relations (†) et (††) livrent

$$(x\top y)\top z = x\top(y\top z).$$

Commutativité. Soient x et y des éléments de E. Alors, $\{x,y\}=\{y,x\}$. De ce fait,

$$x\mathsf{T}y=\sup\{x,y\}=\sup\{y,x\}=y\mathsf{T}x.$$

Idempotence. Pour tout élément x de E, nous avons à l'évidence $x=\sup\{x\}$. Ceci entraîne $x\mathsf{T}x=x$. $\square$

Références

[1] N. Bourbaki, **Algèbre : Chapitres 1 à 3**, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007.

[2] N. Bourbaki, **Théorie des ensembles**, Springer, Berlin, Heidelberg, 2006.