Paires d'entiers naturels distincts et permutables pour l'exponentiation

Christian V. Nguembou Tagne

18 juin 2021

Rappelons que, pour une loi de composition $\top$ sur un ensemble E, on dit que deux éléments x et y de E **commutent** ou **sont permutables** si $x \top y = y \top x$. Le cas échéant, on dit également que x est *permutable avec* y, et inversement que y est *permutable avec* x.

Une loi de composition interne est dite **commutative** si deux éléments quelconques sont permutables.

La loi d'exponentiation sur $\mathbb{N}$ n'est pas commutative ; en effet, 0 et 1 ne commutent pas :

$$0^1 = 0 \neq 1 = 1^0.$$

Manifestement, pour toute loi, deux éléments égaux commutent. Un enjeu pour les lois non commutatives est la détermination de toutes les paires d'éléments distincts et permutables. Dans cette note, nous allons le faire pour la loi d'exponentiation sur $\mathbb{N}$.

1. Entiers permutables avec 0 ou 1

Le seul entier permutable avec 0 pour l'exponentiation sur $\mathbb{N}$ est 0 lui-même. En effet, pour tout entier naturel non nul n, nous avons $0^n = 0 \neq 1 = n^0$.

De même, le seul entier permutable avec 1 pour l'exponentiation sur $\mathbb{N}$ est 1 lui-même. En effet, pour tout entier naturel n différent de 1, nous avons $1^n = 1 \neq n = n^1$.

2. Entiers non nuls permutables

Dans cette section, nous allons déterminer toutes les paires d'entiers naturels, non nuls, distincts et permutables pour la loi d'exponentiation. À cet effet, nous considérons deux entiers naturels x et y non nuls tels que

$$x < y \qquad \text{et} \qquad x^y = y^x,$$

puis démontrons successivement les propositions suivantes :

(a) $x \geq 2$ et $y \geq 2$.

(b) Les entiers x et y ont les mêmes diviseurs premiers.

(c) Il existe un entier naturel non nul m, des nombres premiers $p_1, \ldots, p_m$, et des entiers naturels non nuls $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ d'une part, puis $\beta_1, \ldots, \beta_m$ d'autre part, tels que

$$x = p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m} \qquad \text{et} \qquad y = p_1^{\beta_1} \cdots p_m^{\beta_m}.$$

Au demeurant, $\alpha_j y = \beta_j x$ pour tout indice $j \in \{1, \ldots, m\}$.

(d) x divise y ; précisément, il existe un entier naturel $k \geq 2$ tel que $xk = y$.

(e) $x = 2$ et $y = 4$.

Dans notre argumentation, nous allons mettre à contribution le *théorème fondamental de l'arithmétique*, ainsi que les propositions 1 et 2 ci-dessous.

Proposition 1.

Soit z un nombre entier naturel distinct de 0 et de 1, puis n un entier naturel non nul, et p un nombre premier. Alors, p divise z^n si, et seulement si, p divise z.

Démonstration :

Nous savons que, si a et b d'une part, puis a et c d'autre part, sont des entiers premiers entre eux, alors a et bc sont premiers entre eux. Ce résultat permet d'établir par récurrence que, si a et b sont des entiers premiers entre eux, alors a et b^m sont également premiers entre eux pour tout entier naturel m.

Supposons que le nombre premier p ne divise pas z. Alors, p et z sont premiers entre eux. Ceci entraîne que p et z^n sont premiers entre eux, et donc que p ne divise pas z^n. Par contraposition, nous en déduisons que, si p divise z^n, alors p divise z. Du reste, il est évident que, si p divise z, alors p divise z^n. $\square$

Proposition 2.

Soient a et k des entiers naturels tels que $a \geq 2$ et $k \geq 3$. Alors, $a^{k-1} > k$.

Démonstration :

D'après la formule du binôme de Newton, pour tout réel positif x et chaque entier $\ell \geq 2$, nous avons

$$(1+x)^\ell = \sum_{j=0}^{\ell} \binom{k}{j} x^j \geq \binom{\ell}{0} x^0 + \binom{\ell}{1} x^1 + \binom{\ell}{2} x^2 > 1 + \ell x.$$

Dans le cas particulier où $x = 1$, nous obtenons notamment

$$2^\ell = (1+1)^\ell > 1 + \ell.$$

Puisque $a \geq 2$ et $k - 1 \geq 2$, il en résulte que $a^{k-1} \geq 2^{k-1} > 1 + k - 1 = k$. $\square$

À présent nous établissons les propositions **(a)** – **(e)**.

D'après la section 1, nous avons $x \neq 1$. Donc, $2 \leq x < y$. La proposition **(a)** est ainsi démontrée.

(b) Soit p un diviseur premier de x. Alors, p divise x^y. En raison de $x^y = y^x$, il en découle que p est un diviseur de y^x, et donc un diviseur de y (voir la proposition 1 à la page 2). Nous montrons de manière analogue que tout diviseur premier de y est aussi un diviseur de x.

(c) D'après le théorème fondamental de l'arithmétique, il existe un entier naturel non nul m, des nombres premiers $p_1, \ldots, p_m$, et des entiers naturels non nuls $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ tels que

$$x = p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m}$$

Puisque x et y ont exactement les mêmes diviseurs premiers, il existe des entiers naturels non nuls $\beta_1, \ldots, \beta_m$ tels que $y = p_1^{\beta_1} \cdots p_m^{\beta_m}$. De ce fait,

$$p_1^{\alpha_1 y} \cdots p_m^{\alpha_m y} = \left(p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m}\right)^y = x^y = y^x = \left(p_1^{\beta_1} \cdots p_m^{\beta_m}\right)^x = p_1^{\beta_1 x} \cdots p_m^{\beta_m x}.$$

Compte tenu de l'unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers, ceci entraîne

$$\alpha_j y = \beta_j x \qquad (*)$$

pour chaque $j \in \{1, \ldots, m\}$.

(d) Du reste, pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$, nous avons $\beta_j - \alpha_j > 0$, c'est-à-dire $\beta_j > \alpha_j$. Le contraire entraînerait en effet $\alpha_j \geq \beta_j$, puis $\alpha_j y \geq \beta_j y > \beta_j x$: une contradiction de l'égalité $(*)$. De ce fait, $k = p_1^{\beta_1 - \alpha_1} \cdots p_m^{\beta_m - \alpha_m}$ est un entier supérieur ou égal à 2. Au demeurant,

$$kx = \left(p_1^{\beta_1 - \alpha_1} \cdots p_m^{\beta_m - \alpha_m}\right) \times \left(p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m}\right) = p_1^{\beta_1} \cdots p_m^{\beta_m} = y.$$

(e) Les égalités $x^y = y^x$ et $kx = y$ entraînent alors $x^{kx} = (kx)^x$, c'est-à-dire

$$\left(x^k\right)^x = (kx)^x.$$

Il en résulte que $x^k = kx$, puis $x^{k-1} = k$. Compte tenu de la proposition 2, ceci induit $k \leq 2$. D'où $k = 2$. Donc, $x = x^{2-1} = x^{k-1} = k = 2$ et $y = kx = 2 \times 2 = 4$. Par conséquent, $(2, 4)$ est l'unique couple (x, y) d'entiers naturels vérifiant $x < y$ et $x^y = y^x$.

3. Conclusion

Deux entiers naturels x et y sont permutables pour l'exponentiation si, et seulement si, $x = y$ ou $\{x, y\} = \{2, 4\}$.

Références

[1] N. Bourbaki, **Algèbre : Chapitres 1 à 3**, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007.
[2] N. Bourbaki, **Théorie des ensembles**, Springer, Berlin, Heidelberg, 2006.