Six réflexions autour de la notion d'associativité

Christian V. Nguembou Tagne

18 juin 2021

Cette note propose quelques réflexions liées à la propriété d'*associativité* des lois de composition internes. Elle a pour trame de fond les exercices 6, 7, 8, 9, 10 et 11 de la section §1 du **Chapitre I** du volume d'**Algèbre** des **Éléments de Mathématiques** de Nicolas Bourbaki [1].

1. Sous-magma associatif d'un magma quelconque

Soit $\top$ une loi de composition sur un ensemble E, et A la partie de E formée des éléments x tels que $x\top(y\top z) = (x\top y)\top z$ quels que soient $y \in E$ et $z \in E$. Dans cette section, nous démontrons que la partie A est stable pour la loi de composition $\top$ et que la loi induite sur A par $\top$ est associative.

1.1. Stabilité de la partie

Soient x et x' des éléments de A. Alors, pour tout couple $(y, z) \in E \times E$, nous avons

$$(x\top x')\top\Big[y\top z\Big] = x\top\Big[x'\top(y\top z)\Big] = x\top\Big[(x'\top y)\top z\Big] = \Big[x\top(x'\top y)\Big]\top z = \Big[(x\top x')\top y\Big]\top z.$$

Ceci entraîne $x\top x' \in A$. La partie A est donc stable pour la loi $\top$.

1.2. Associativité de la loi induite

Par définition de l'ensemble A, pour tout triplet (x, x', x'') d'éléments de A, nous avons

$$x\top(x'\top x'') = (x\top x')\top x''.$$

Ceci signifie que la loi induite sur A par $\top$ est associative.

2. Des parties stables pour une loi de composition associative

Soit $\top$ une loi de composition associative sur un ensemble E. De plus, soient a et b deux éléments distincts de E. Dans cette section, nous démontrons que les ensembles

$$\{a\}\top E, \qquad E\top\{b\}, \qquad \{a\}\top E\top\{b\} \qquad \text{et} \qquad E\top\{a\}\top E$$

sont des parties stables de E pour la loi $\top$.

Nous avons $(a\top x)\top(a\top y) = a\top[x\top(a\top y)] \in \{a\}\top E$ pour tout couple $(x,y) \in E\times E$. La partie $\{a\}\top E$ est donc stable pour la loi $\{a\}\top E$.

La stabilité de $E\top\{b\}$ se prouve de manière analogue ; en effet, pour tout couple (x,y) d'éléments de E, nous avons $(x\top b)\top(y\top b) = [(x\top b)\top y]\top b \in E\top\{b\}$.

Soient x et y des éléments de E. Alors,

$$\begin{aligned}(a\top x\top b)\top(a\top y\top b) &= (a\top x\top b)\top\Big[(a\top y)\top b\Big] = \Big[(a\top x\top b)\top(a\top y)\Big]\top b\\ &= \Big[a\top\Big((x\top b)\top(a\top y)\Big)\Big]\top b = a\top\Big[(x\top b)\top(a\top y)\Big]\top b.\end{aligned}$$

Par conséquent, le composé $(a\top x\top b)\top(a\top y\top b)$ appartient à la partie $\{a\}\top E\top\{b\}$. D'où la stabilité de cette dernière pour la loi $\top$.

Soient x, x', y et y' des éléments de E. Alors,

$$\begin{aligned}(x\top a\top x')\top(y\top b\top y') = x\top\Big[(a\top x')\top(y\top a\top y')\Big] &= x\top\Big[a\top\Big(x'\top(y\top a\top y')\Big)\Big]\\ &= x\top a\top\Big[x'\top(y\top a\top y')\Big]\end{aligned}$$

De ce fait, le composé $(x\top a\top x')\top(y\top b\top y')$ appartient à la partie $E\top\{a\}\top E$. Cette dernière est donc stable pour la loi $\top$.

3. Une loi associative définie à partir d'une autre loi associative

Soit $\top$ une loi associative sur un ensemble E, et a un élément de E. Pour tout couple (x,y) d'éléments de E, nous posons $x\perp y = x\top a\top y$ et définissons ainsi une autre loi de composition sur E. Dans cette section, nous démontrons que la loi $\perp$ est associative.

Soient x, y et z des éléments de E. Alors,

$$\begin{aligned}x\perp(y\perp z) = x\top a\top(y\perp z) = (x\top a)\top\Big[y\top(a\top z)\Big] = \Big[(x\top a)\top y\Big]\top(a\top z) &= (x\top a\top y)\top(a\top z)\\ &= (x\perp y)\top(a\top z)\\ &= (x\perp y)\top a\top z\\ &= (x\perp y)\perp z.\end{aligned}$$

Ceci signifie que la loi $\perp$ est associative.

4. Les projections canoniques sont des lois de composition associatives opposées !

Soit E un ensemble. Les projections canoniques f et g définies de $E \times E$ sur E respectivement par $f(x, y) = x$ et $g(x, y) = y$ sont manifestement des lois de composition sur E. Dans cette section, nous démontrons que ces deux lois sont associatives et opposées. À cet effet, dans un souci de simplification, nous posons $x \top y = x$ et $x \perp y = y$ pour tout couple $(x, y) \in E \times E$.

Alors, pour chaque triplet (x, y, z) d'éléments de E, nous avons

$$x \top (y \top z) = x = x \top y = x \top (y \top z) \qquad \text{et} \qquad x \perp (y \perp z) = y \perp z = (x \perp y) \perp z.$$

De ce fait, les lois $\top$ et $\perp$ sont associatives. Au demeurant, $y \top x = y = x \perp y$ pour tout couple $(x, y) \in E \times E$. Ceci signifie que les lois $\top$ et $\perp$ sont opposées.

5. Une loi associative et commutative sur l'ensemble des parties d'un ensemble

Soit E un ensemble. Pour tout couple (X, Y) de parties de X, nous posons

$$X \top Y = \begin{cases} X \cup Y & \text{si } X \cap Y = \emptyset, \\ E & \text{si } X \cap Y \neq \emptyset. \end{cases}$$

Une loi de composition $\top$ est ainsi définie sur $\mathscr{P}(E)$. Dans cette section, nous démontrons que cette loi est associative et commutative.

5.1. Associativité

Soient X, Y et Z des parties de E. Pour montrer que

$$X \top (Y \top Z) = (X \top Y) \top Z, \tag{E}$$

il convient de distinguer les cas $Y \cap Z = \emptyset$ et $Y \cap Z \neq \emptyset$.

Premier cas : Soit $Y \cap Z = \emptyset$. Alors, $Y \top Z = Y \cup Z$. Cependant, l'intersection est distributive par rapport à la réunion. Ainsi, $X \cap (Y \top Z) = X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$.

(a) De ce fait, si $X \cap (Y \top Z) = \emptyset$, alors $X \cap Y = X \cap Z = \emptyset$ et

$$X \top (Y \top Z) = X \cup (Y \cup Z).$$

Ceci entraîne $X \top Y = X \cup Y$, puis $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (X \cap Z) = \emptyset$, et donc

$$(X \top Y) \top Z = (X \cup Y) \top Z = (X \cup Y) \cup Z.$$

La réunion étant associative sur $\mathscr{P}(E)$, il en résulte que $X \top (Y \top Z) = (X \top Y) \top Z$.

(b) Si en revanche $X \cap (Y \top Z) \neq \emptyset$, alors $X \cap Y \neq \emptyset$ ou $X \cap Z \neq \emptyset$, et

$$X \top (Y \top Z) = E.$$

Ainsi, l'assertion $X \cap Y \neq \emptyset$ induit $X \top Y = E$, puis

$$(X \top Y) \top Z = E \top Z = \left\{ \begin{array}{rl} E \cup Y & \text{si} \quad Y = \emptyset, \\ E & \text{si} \quad Y \neq \emptyset, \end{array} \right\} = E = X \top (Y \top Z).$$

Par ailleurs, l'égalité $X \cap Y = \emptyset$ entraîne $X \cap Z \neq \emptyset$ et $X \cap Z \subset (X \cup Y) \cap Z \neq \emptyset$, puis

$$(X \top Y) \top Z = (X \cup Y) \top Z = E = X \top (Y \top Z).$$

Second cas : Soit $Y \cap Z \neq \emptyset$. Alors, $Y \top Z = E$, et donc

$$X \cap (Y \top Z) = X \top E = \left\{ \begin{array}{rl} X \cup E & \text{si} \quad X = \emptyset, \\ E & \text{si} \quad X \neq \emptyset, \end{array} \right\} = E.$$

Du reste, $Z \neq \emptyset$. Par conséquent,

$$(X \top Y) \cap Z = \left\{ \begin{array}{rl} (X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z) & \text{si} \quad X \cap Y = \emptyset, \\ E \cap Z = Z & \text{si} \quad X \cap Y \neq \emptyset, \end{array} \right\} \neq \emptyset.$$

D'où $(X \top Y) \top Z = E = X \cap (Y \top Z)$.

En tout état de cause, l'égalité (**E**) est satisfaite pour tout triplet (X, Y, Z) de $\mathscr{P}(E)$. Ceci signifie que la loi $\top$ sur $\mathscr{P}(E)$ est associative.

5.2. Commutativité

Soient X et Y des parties de E. Alors, par définition,

$$X \top Y = \left\{ \begin{array}{rl} X \cup Y & \text{si} \quad X \cap Y = \emptyset, \\ E & \text{si} \quad X \cap Y \neq \emptyset. \end{array} \right.$$

Au demeurant, l'intersection et la réunion sont des lois commutatives sur $\mathscr{P}(E)$. En particulier, $X \cap Y = Y \cap X$ et $X \cup Y = Y \cup X$. Par conséquent,

$$X \top Y = \left\{ \begin{array}{rl} Y \cup X & \text{si} \quad Y \cap X = \emptyset, \\ E & \text{si} \quad Y \cap X \neq \emptyset, \end{array} \right\} = Y \cap X.$$

La commutativité de $\top$ sur $\mathscr{P}(E)$ est ainsi démontrée.

6. Stabilité du composé de deux parties stables pour une loi associative

Dans cette section, nous démontrons une proposition qui révèle une condition suffisante de stabilité du composé de deux parties stables pour une loi associative.

6.1. Proposition

Soit $\top$ une loi associative sur un ensemble E. De plus, soient A et B deux parties de E stables pour la loi $\top$. Si $B\top A \subset A\top B$, alors $A\top B$ est une partie stable de E.

6.2. Démonstration

Nous supposons que $B\top A \subset A\top B$ et considérons des éléments x et x' de $A\top B$. Alors, il existe des éléments a et a', puis b et b' de B tels que $x = a\top b$ et $x' = a'\top b'$. D'où

$$x\top x' = (a\top b)\top(a'\top b') = [(a\top b)\top a']\top b' = [a\top(b\top a')]\top b',$$

car la loi $\top$ est associative. Cependant, $b\top a' \in B\top A$ et $B\top A \subset A\top B$. De ce fait, il existe des éléments $a'' \in A$ et $b'' \in B$ tels que $b\top a' = a''\top b''$. Ainsi,

$$x\top x' = [a\top(a''\top b'')]\top b' = [(a\top a'')\top b'']\top b' = (a\top a'')\top(b''\top b').$$

Les composés $a\top a''$ et $b''\top b'$ appartiennent respectivement aux parties A et B, puisque ces dernières sont des parties stables de E pour la loi $\top$. Ceci entraîne $x\top x' \in A\top B$. Par conséquent, $A\top B$ est une partie stable de E.

Références

[1] N. Bourbaki, **Algèbre : Chapitres 1 à 3**, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007.

[2] N. Bourbaki, **Théorie des ensembles**, Springer, Berlin, Heidelberg, 2006.