Théorie des magmas

Composé d'une séquence d'éléments et théorème d'associativité

Christian V. Nguembou Tagne

27 juin 2021

Ce texte est une introduction à la théorie des magmas. Il est inspiré du **Chapitre I** du volume d'**Algèbre** des **Éléments de Mathématiques** de Nicolas Bourbaki [1], notamment de la section §1 intitulée « *Lois de composition, associativité, commutativité* ».

Le texte se décline en trois sections. La première section formule les définitions introductives de la théorie et présente quelques exemples de magmas. La deuxième section est dédiée à la composition des séquences d'éléments dans un magma. La troisième section propose une démonstration détaillée du **théorème d'associativité**.

1. Définitions et exemples

Définition 1.

Une **loi de composition** (*interne*) sur un ensemble E est une application du produit cartésien $E \times E$ dans E. Pour une telle application notée f, l'image $f(x, y)$ d'un couple $(x, y) \in E \times E$ est nommée le **composé** de x et de y pour la loi f.

Un ensemble muni d'une loi de composition est appelé un **magma**.

Dans un souci de simplification, pour une loi T, le composé $\mathsf{T}(x, y)$ est noté $x\mathsf{T}y$, ou simplement xy s'il n'y a pas de risque de confusion.

Les ensembles de nombres constituent une source de laquelle peut se former un nombre important de magmas.

Exemple 1.

Sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, l'addition, la multiplication et l'exponentiation sont des lois de composition. Pour ces lois, les composés d'un x et d'un y, tous deux entiers naturels, sont symbolisés respectivement par $x + y$, $x \cdot y$ et x^y.

Les opérations sur les ensembles permettent de construire d'autres classes de magmas.

Exemple 2.

Les applications $(X, Y) \mapsto X \cup Y$ et $(X, Y) \mapsto X \cap Y$ définissent des lois de composition sur l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties d'un ensemble E.

L'exemple 3 suivant présente une « construction universelle ».

Exemple 3.

Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille de magmas. La loi sur E_i étant notée $\top_i$, l'application

$$\Big((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}\Big) \mapsto \big((x_i \top_i y_i)\big)_{i\in I}$$

est une loi de composition sur le produit $E = \prod_{i\in I} E_i$, appelé **produit** des lois $\top_i$. L'ensemble E, muni de cette loi, est appelé le **magma produit** des magmas E_i. En particulier, si tous les magmas E_i sont égaux à un même magma M, nous obtenons le **magma des applications** de I dans M.

La définition 2 suivante montre qu'une nouvelle loi de composition peut être déduite d'une loi déjà connue.

Définition 2.

Soit E un magma et $\top$ sa loi de composition. La loi de composition $\perp$ définie sur E par $x \perp y = y \top x$ est dite **opposée** à $\top$. L'ensemble E, muni de cette loi opposée, est appelé **magma opposé** de E.

La définition 3 suivante présente un attribut potentiel des lois de composition.

Définition 3.

Une loi $\top$ sur un ensemble E est dite **commutative** si elle est égale à sa loi opposée, c'est-à-dire si $x \top y = y \top x$ pour tout couple $(x, y) \in E \times E$. Un **magma commutatif** est un magma dont la loi est commutative.

L'addition sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels par exemple est une loi commutative.

Lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, toute loi commutative peut être notée « *additivement* », c'est-à-dire en utilisant le symbole $+$. Dans le même esprit, une loi, dont le composé d'un élément x et d'un élément y est désigné par $x \cdot y$ ou xy, est dite notée « *multiplicativement* ».

La définition 4 suivante conceptualise les applications entre des magmas qui sont compatibles avec les lois desdits magmas.

Définition 4.

Soient E et F des magmas de lois de composition respectives $\top$ et $\perp$. Un **homomorphisme** (ou **morphisme**) de E dans F est une application f de E dans F vérifiant $f(x \top y) = f(x) \perp f(y)$ pour tout couple $(x, y) \in E \times E$. Un homomorphisme d'un magma dans lui-même est appelé **endomorphisme**. Un homomorphisme (resp. endomorphisme) bijectif est appelé **isomorphisme** (resp. **automorphisme**).

2. Composé d'une séquence d'éléments

Une **séquence** d'éléments d'un ensemble E est une famille finie $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E dont l'ensemble d'indices est totalement ordonné.

En particulier, toute suite finie $(x_i)_{i \in H}$, où H est une partie finie de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, peut être considérée comme étant une séquence, en munissant H de la relation d'ordre induite par l'ordre naturel $\leqslant$ sur $\mathbb{N}$.

Deux séquences $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_k)_{k \in K}$ sont **semblables** s'il existe un isomorphisme φ d'ensembles ordonnés de I sur K tel que $y_{\varphi(i)} = x_i$ pour tout $i \in I$.

✍

Toute séquence $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ est semblable à une suite finie convenablement choisie. En effet, pour tout ensemble A, fini, non vide et ordonné, il existe une bijection croissante de A sur un intervalle $[\![1, n]\!]$ de $\mathbb{N}$.

Définition 5.

Soit $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ une séquence d'éléments d'un magma E dont l'ensemble d'indices A est non vide. Le **composé** (pour la loi $\top$ de E) de la séquence $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$, noté $\displaystyle\mathop{\top}_{\alpha \in A} x_\alpha$, est l'élément de E défini par récurrence sur le nombre d'élément de A, de la façon suivante :

(i) si $A = \{\beta\}$, alors $\displaystyle\mathop{\top}_{\alpha \in A} x_\alpha = x_\beta$;

(ii) si A a au moins deux éléments, si β est le plus petit élément de A, et si $A' = A - \{\beta\}$, alors

$$\mathop{\top}_{\alpha \in A} x_\alpha = x_\beta \top \left(\mathop{\top}_{\alpha \in A} x_\alpha \right).$$

Par exemple, pour $A = \{\lambda, \mu, \nu\}$ avec $\lambda < \mu < \nu$, le composé $\underset{\alpha \in A}{\top} x_\alpha$ est égal à

$$x_\lambda \top (x_\mu \top x_\nu).$$

✍

Les composés de deux séquences semblables sont égaux. En particulier, le composé d'une séquence quelconque est égal au composé d'une suite finie.

Pour nous en convaincre, soient $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ et $(y_\beta)_{\beta \in B}$ des séquences semblables d'éléments d'un magma E de loi $\top$ avec $\mathbf{card}(A) = \mathbf{card}(B) = n$, où $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, par définition, il existe un isomorphisme φ d'ensembles ordonnés de A sur B tel que $x_\alpha = y_{\varphi(\alpha)}$. En outre, soit $\alpha_0 = \min A$ et $\beta_0 = \min B$. Alors, $\beta_0 = \varphi(\alpha_0)$ et $x_{\alpha_0} = y_{\beta_0}$.

Si $n = 1$, alors $\underset{\alpha \in A}{\top} x_\alpha = x_{\alpha_0} = y_{\beta_0} = \underset{\beta \in B}{\top} y_\beta$.

Maintenant, nous supposons que $n \geqslant 2$ et que les composés de deux séquences semblables, dont l'ensemble des indices a pour cardinal $n-1$, sont égaux. Alors, les familles $(x_\alpha)_{\alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}}$ et $(y_\beta)_{\beta \in B \setminus \{\beta_0\}}$, dont les ensembles d'indices ont manifestement pour cardinal $n-1$, sont des séquences semblables. En vertu de l'hypothèse, il en résulte que

$$\underset{\alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}}{\top} x_\alpha = \underset{\beta \in B \setminus \{\beta_0\}}{\top} y_\beta.$$

De ce fait,

$$\underset{\alpha \in A}{\top} x_\alpha = x_{\alpha_0} \top \left(\underset{\alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}}{\top} x_\alpha \right) = y_{\beta_0} \top \left(\underset{\beta \in B \setminus \{\beta_0\}}{\top} y_\beta \right) = \underset{\beta \in B}{\top} y_\beta.$$

Pour une loi notée *additivement*, le composé d'une séquence $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ est symbolisé par

$$\sum_{\alpha \in A} x_\alpha$$

et appelé **somme** de la séquence $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ (les x_α étant appelés les **termes** de la somme).

Pour une loi notée *multiplicativement*, le composé de $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ est désigné par

$$\prod_{\alpha \in A} x_\alpha$$

et appelé **produit** de la séquence $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ (les x_α étant appelés les **facteurs** du produit).

3. Théorème d'associativité

À la suite de la commutativité, un autre attribut potentiel des lois de composition est révélé par la définition 6 suivante.

Définition 6.

Une loi $\top$ sur un ensemble E est dite **associative** si $(x \top y) \top z = x \top (y \top z)$ pour tout triplet $(x, y, z) \in E^3$. Un **magma associatif** est un magma dont la loi est associative.

La loi opposée à une loi associative est elle-même associative.

L'addition et la multiplication sur $\mathbb{N}$ sont des lois associatives. Il en est de même pour les lois de l'exemple 2 à la page 2. Le lecteur sceptique est invité à s'en convaincre.

Par définition, pour une loi quelconque, le composé d'une séquence de trois éléments se réalise en composant le premier élément au composé des deux derniers éléments. En revanche, pour une loi associative, le même résultat s'obtient en composant le composé des deux premiers éléments et le troisième élément de la séquence. Le théorème 1 suivant donne une forme générale de cette propriété accommodante.

Théorème 1 (Théorème d'associativité).

Soit E un magma associatif dont la loi est notée $\top$. De plus, soit A un ensemble fini non vide, totalement ordonné, réunion d'une séquence de parties non vides $(B_i)_{i \in I}$ telles que les relations $\alpha \in B_i$ et $\beta \in B_j$, puis $i < j$, entraînent $\alpha < \beta$. Alors,

$$\mathop{\top}_{\alpha \in A} x_\alpha = \mathop{\top}_{i \in I} \left(\mathop{\top}_{\alpha \in B_i} x_\alpha \right) \tag{1}$$

pour toute séquence $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ d'éléments de E, ayant A pour ensemble d'indices.

Démonstration :

Nous allons faire un raisonnement par récurrence sur le cardinal n de A. À cet effet, nous considérons le cardinal p de I, et le plus petit élément h de I, puis posons $J = I - \{h\}$.

Soit $n = 1$. Alors, $A = \{\beta\}$; et, nécessairement, $p = 1$, car les parties B_i sont non vides. De ce fait, $I = \{h\}$ et $B_h = \{\beta\}$. Par définition des composés, il en résulte donc

$$\mathop{\top}_{\alpha \in A} x_\alpha = x_\beta \qquad \text{et} \qquad \mathop{\top}_{i \in I} \left(\mathop{\top}_{\alpha \in B_i} x_\alpha \right) = \mathop{\top}_{\alpha \in B_h} x_\alpha = x_\beta .$$

L'égalité (1) est par conséquent vérifiée si $n = 1$.

Maintenant, soit n un entier supérieur ou égal à 2. Nous supposons l'égalité (1) satisfaite pour tout ensemble d'indices ayant au plus $n-1$ éléments, et distinguons deux cas :

(a) Nous supposons que la partie B_h a un seul élément β et posons $C = \bigcup_{i\in J} B_i$. Alors, C est un ensemble fini de cardinal $n-1$, totalement ordonné, réunion d'une séquence de parties non vides $(B_i)_{i\in J}$ telles que les relations $\alpha \in B_i$ et $\beta \in B_j$, puis $i < j$, entraînent $\alpha < \beta$. En vertu de l'hypothèse de récurrence, il en résulte que

$$\mathop{\top}_{\alpha\in C} x_\alpha = \mathop{\top}_{i\in J}\left(\mathop{\top}_{\alpha\in B_i} x_\alpha\right).$$

Cependant, β est le plus petit élément et $C = A - \{\beta\}$. Ainsi, par définition,

$$\mathop{\top}_{\alpha\in A} x_\alpha = x_\beta \top \left(\mathop{\top}_{\alpha\in C} x_\alpha\right).$$

De ce fait,

$$\mathop{\top}_{\alpha\in A} x_\alpha = x_\beta \top \left[\mathop{\top}_{i\in J}\left(\mathop{\top}_{\alpha\in B_i} x_\alpha\right)\right] = \left(\mathop{\top}_{\alpha\in B_h} x_\alpha\right) \top \left[\mathop{\top}_{i\in J}\left(\mathop{\top}_{\alpha\in B_i} x_\alpha\right)\right] = \mathop{\top}_{i\in\{h\}\cup J}\left(\mathop{\top}_{\alpha\in B_i} x_\alpha\right),$$

puisque $(B_i)_{i\in I}$ est une séquence. Ainsi,

$$\mathop{\top}_{\alpha\in A} x_\alpha = \mathop{\top}_{i\in I}\left(\mathop{\top}_{\alpha\in B_i} x_\alpha\right).$$

(b) Nous supposons que B_h a au moins deux éléments. Soit β le plus petit élément de B_h. Alors, β est également le plus petit élément de A. Nous posons $A' = A - \{\beta\}$ et $B'_i = A' \cap B_i$ pour chaque $i \in I$. Alors, l'ensemble A' a $n-1$ éléments, puis $B_h = \{\beta\} \cup B'_h$ et $B'_i = B_i$ pour chaque $i \in J$. Du reste, A' est totalement ordonné et la réunion de la séquence $(B'_i)_{i\in I}$, constituée de parties non vides telles que les relations $\alpha \in B'_i$ et $\beta \in B'_j$, puis $i < j$, entraînent $\alpha < \beta$. D'après l'hypothèse de récurrence, nous en déduisons

$$\mathop{\top}_{\alpha\in A'} x_\alpha = \mathop{\top}_{i\in I}\left(\mathop{\top}_{\alpha\in B'_i} x_\alpha\right) = \left(\mathop{\top}_{\alpha\in B'_h} x_\alpha\right) \top \left[\mathop{\top}_{i\in J}\left(\mathop{\top}_{\alpha\in B'_i} x_\alpha\right)\right],$$

puis

$$\mathop{\top}_{\alpha\in A'} x_\alpha = \left(\mathop{\top}_{\alpha\in B'_h} x_\alpha\right) \top \left[\mathop{\top}_{i\in J}\left(\mathop{\top}_{\alpha\in B_i} x_\alpha\right)\right].$$

Compte tenu de l'associativité de la loi $\top$, ceci livre

$$\mathop{\top}_{\alpha\in A} x_\alpha = x_\beta \top \left(\mathop{\top}_{\alpha\in A'} x_\alpha\right) = \left[x_\beta \top \left(\mathop{\top}_{\alpha\in B'_h} x_\alpha\right)\right] \top \left[\mathop{\top}_{i\in J}\left(\mathop{\top}_{\alpha\in B_i} x_\alpha\right)\right].$$

Donc,

$$\mathop{\top}_{\alpha\in A} x_\alpha = \left(\mathop{\top}_{\alpha\in\{\beta\}\cup B'_h} x_\alpha\right) \top \left[\mathop{\top}_{i\in J}\left(\mathop{\top}_{\alpha\in B_i} x_\alpha\right)\right] = \left(\mathop{\top}_{\alpha\in B_h} x_\alpha\right) \top \left[\mathop{\top}_{i\in J}\left(\mathop{\top}_{\alpha\in B_i} x_\alpha\right)\right]$$

et

$$\mathop{\top}_{\alpha\in A} x_\alpha = \mathop{\top}_{i\in\{h\}\cup J}\left(\mathop{\top}_{\alpha\in B_i} x_\alpha\right) = \mathop{\top}_{i\in I}\left(\mathop{\top}_{\alpha\in B_i} x_\alpha\right).$$

L'égalité (1) est par conséquent vérifiée dans tous les cas. □

Pour une loi associative $\top$, lorsqu'aucune confusion n'est possible, le composé $\mathop{\top}\limits_{p\leqslant i\leqslant q} x_i$ d'une suite $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ peut être encore symbolisé par

$$x_p \top \cdots \top x_q.$$

Compte tenu de cette notation, nous avons

$$x_0 \top x_1 \top \cdots \top x_n = x_0 \top \Big(x_1 \top \cdots \top x_n\Big).$$

Au demeurant, les formules suivantes sont des cas particuliers du théorème d'associativité :

$$x_0 \top x_1 \top \cdots \top x_n = \Big(x_0 \top x_1 \top \cdots \top x_{n-1}\Big) \top x_n$$

et

$$x_0 \top x_1 \top \cdots \top x_n = x_0 \top \Big(x_1 \top \cdots \top x_{n-1}\Big) \top x_n.$$

Définition 7.

Soit E un magma de loi $\top$ et n un entier naturel non nul. Le composé d'une séquence de n termes, tous égaux à un élément $x \in E$, se note $\overset{n}{\top} x$.

Pour une loi notée *multiplicativement*, ce composé est désigné par x^n est appelé **puissance n-ième** de x.

Pour une loi notée *additivement*, ce composé est symbolisé par nx et appelé **n-uple** de l'élément x.

Dans le cas des lois associatives, des propriétés importantes sur ces composés, puissances n-ièmes, sont donnés par la proposition 1 suivante, qui en réalité est un corollaire du théorème 1.

Proposition 1.

Soit E un magma associatif dont la loi est notée $\top$ et x un élément de E. De plus, soient $n_1, n_2, \ldots, n_p$ des entiers naturels non nuls. Alors,

$$\overset{n_1+n_2+\cdots+n_p}{\top} x = \left(\overset{n_1}{\top} x\right) \top \left(\overset{n_2}{\top} x\right) \top \cdots \top \left(\overset{n_p}{\top} x\right). \tag{2}$$

En particulier, si m, n et p sont des entiers naturels non nuls, alors

$$\overset{m+n}{\top} x = \left(\overset{m}{\top} x\right) \top \left(\overset{n}{\top} x\right) \tag{3}$$

et

$$\overset{pn}{\top} x = \overset{p}{\top} \left(\overset{n}{\top} x\right). \tag{4}$$

Démonstration :

Soit $A = [\![1, n_1 + n_2 + \cdots + n_p]\!]$. Nous posons $x_\alpha = x$ pour tout $\alpha \in A$. Une séquence $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ est ainsi définie. Du reste, soit

$$B_1 = [\![1, n_1]\!] \qquad \text{et} \qquad B_i = [\![n_1 + \cdots + n_{i-1} + 1, n_1 + \cdots + n_{i-1} + n_i]\!]$$

pour chaque $i \in [\![2, p]\!]$. Alors, A, ensemble fini non vide, totalement ordonné, est une réunion de la séquence de parties non vides $(B_i)_{i \in I}$, telles que les relations $\alpha \in B_i$ et $\beta \in B_j$, puis $i < j$, entraînent $\alpha < \beta$. Le théorème 1 entraîne donc

$$\underset{\alpha \in A}{\top} x_\alpha = \underset{i \in I}{\top} \left(\underset{\alpha \in B_i}{\top} x_\alpha\right).$$

Cependant,

$$\underset{\alpha \in A}{\top} x_\alpha = \overset{n_1+n_2+\cdots+n_p}{\top} x \qquad \text{et} \qquad \underset{\alpha \in B_i}{\top} x_\alpha = \overset{n_i}{\top} x.$$

De ce fait,

$$\overset{n_1+n_2+\cdots+n_p}{\top} x = \underset{i \in I}{\top} \left(\overset{n_i}{\top} x\right) = \left(\overset{n_1}{\top} x\right) \top \left(\overset{n_2}{\top} x\right) \top \cdots \top \left(\overset{n_p}{\top} x\right).$$

L'égalité (2) est ainsi démontrée.

Pour obtenir l'égalité (3), il suffit de poser $p = 2$, puis $n_1 = m$ et $n_2 = n$.

Pour obtenir l'égalité (4), il suffit de poser $n_1 = n_2 = \cdots = n_p = n$. $\square$

✍

Pour une loi notée *multiplicativement*, les égalités (2), (3) et (4) s'écrivent respectivement

$$x^{n_1+n_2+\cdots+n_p} = x^{n_1}x^{n_2}\cdots x^{n_p},$$

puis

$$x^{m+n} = x^m x^n \qquad \text{et} \qquad x^{pn} = (x^n)^p.$$

Pour une loi notée *additivement*, les égalités (2), (3) et (4) s'écrivent respectivement

$$(n_1 + n_2 + \cdots + n_p)x = n_1x + n_2x + \cdots + n_px,$$

puis

$$(m+n)x = mx + nx \qquad \text{et} \qquad (pn)x = p(nx).$$

Références

[1] N. Bourbaki, **Algèbre : Chapitres 1 à 3**, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007.

[2] N. Bourbaki, **Théorie des ensembles**, Springer, Berlin, Heidelberg, 2006.