Introduction à la théorie des magmas

Théorème de commutativité

Christian V. Nguembou Tagne

28 juin 2021

Dans la leçon précédente, nous avons vu que, pour une loi associative, le composé d'une séquence d'éléments se réalise dans un certain ordre. Lorsque les éléments de la séquence sont deux-à-deux permutables, l'ordre de placement des éléments importe peu. Tel est l'enseignement du **théorème de commutativité** que nous formulons et démontrons dans cet article. Nous allons également montrer que, pour un magma associatif et commutatif, la formation des puissances n-ièmes, pour un entier naturel non nul n donné, définit un endomorphisme dudit magma.

1. Rappels sur les composés de séquences

Deux séquences $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_k)_{k\in K}$ sont dits **semblables** s'il existe un isomorphisme φ d'ensembles ordonnés de I sur K tel que $y_{\varphi(i)} = x_i$ pour tout $i \in I$.

> ✍
>
> Toute séquence $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ est semblable à une suite finie convenable.

En effet, pour tout ensemble A, fini, non vide et ordonné, il existe une bijection croissante de A sur un intervalle $[\![0, n]\!]$ de $\mathbb{N}$.

> ✍
>
> Soit $\top$ une loi de composition sur un ensemble E. Si $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ et $(y_\beta)_{\beta\in B}$ sont des séquences semblables d'éléments de E, alors
>
> $$\mathop{\top}_{\alpha\in A} x_\alpha = \mathop{\top}_{\beta\in B} y_\beta. \tag{1}$$

Nous allons établir ce fait par récurrence sur le cardinal n commun aux ensembles d'indices A et B.

Manifestement, l'égalité (1) est satisfaite si $n = 1$.

À présent, soit $n > 1$. Nous supposons que l'égalité (1) est satisfaite lorsque le cardinal des deux ensembles des indices est égal à $p - 1$. En raison de la similitude des séquences, il existe un isomorphisme f d'ensembles ordonnés de A sur B tel que $y_{f(\alpha)} = x_\alpha$ pour tout $\alpha \in A$. Soit γ le plus petit élément de A. Alors, $f(\gamma)$ est le plus petit élément de B. En posant, $A' = A - \{\gamma\}$ et $B' = B - \{f(\gamma)\}$, nous obtenons donc

$$\mathop{\top}_{\alpha \in A} x_\alpha = x_\gamma \top \left(\mathop{\top}_{\alpha \in A'} x_\alpha \right) \qquad \text{et} \qquad \mathop{\top}_{\beta \in B} y_\beta = y_{f(\gamma)} \top \left(\mathop{\top}_{\beta \in B'} y_\beta \right).$$

Cependant, $(x_\alpha)_{\alpha \in A'}$ et $(y_\beta)_{\beta \in B'}$ sont des séquences semblables d'éléments de E, pour les relations d'ordre induites respectivement sur A' et B', et pour l'isomorphisme déduit de f. Ces derniers ensembles ayant chacun $n - 1$ éléments. Il en résulte que

$$\mathop{\top}_{\alpha \in A'} x_\alpha = \mathop{\top}_{\beta \in B'} y_\beta,$$

compte tenu de l'hypothèse de récurrence. D'où l'égalité (1), puisque $y_{f(\gamma)} = x_\gamma$.

2. Théorème de commutativité

Deux éléments x et y d'un magma E de loi $\top$ sont dits **permutables** si $x \top y = y \top x$.

Théorème 1 (Théorème de commutativité).

Soit $\top$ une loi de composition associative sur E, puis $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille finie non vide d'éléments de E, deux-à-deux permutables. En outre, soient B et C deux ensembles totalement ordonnés ayant A pour ensemble sous-adjacent. Alors,

$$\mathop{\top}_{\alpha \in B} x_\alpha = \mathop{\top}_{\alpha \in C} x_\alpha. \tag{2}$$

Démonstration :

Par définition, l'égalité (2) est vraie si A a un seul élément. Pour démontrer le théorème, nous raisonnons par récurrence sur le nombre n d'éléments de A. À cet effet, notons qu'il existe un isomorphisme f d'ensembles ordonnés de $[\![0, n-1]\!]$ sur B. En posant, $\alpha_i = f(i)$ pour chaque indice $i \in [\![0, n-1]\!]$, nous avons donc

$$A = \left\{ \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \right\},$$

puis $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_{n-1}$ pour l'ordre de B. Du reste,

$$\mathop{\top}_{\alpha \in B} x_\alpha = \mathop{\top}_{i=0}^{n-1} x_{\alpha_i}.$$

Maintenant, soit $n > 1$. Nous supposons le théorème vrai lorsque $\mathbf{card}(A) < n$. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que α_k soit le plus petit élément de A pour l'ordre de C. Nous désignons par C' l'ensemble $A - \{\alpha_k\}$ muni de l'ordre induit et distinguons trois cas :

(a) Soit $k = 0$. Alors, $\displaystyle\top_{\alpha\in C} x_\alpha = x_{\alpha_0} \top \left(\top_{\alpha\in C'} x_\alpha\right)$. Or, par l'hypothèse de récurrence,

$$\top_{\alpha\in C'} x_\alpha = \top_{i=1}^{n-1} x_{\alpha_i}.$$

Par définition des composés pour la loi $\top$, il s'ensuit

$$\top_{\alpha\in C} x_\alpha = x_{\alpha_0} \top \left(\top_{i=1}^{n-1} x_{\alpha_i}\right) = \top_{i=0}^{n-1} x_{\alpha_i} = \top_{\alpha\in B} x_\alpha.$$

(b) Soit $k = n-1$. Alors, $\displaystyle\top_{\alpha\in C} x_\alpha = x_{\alpha_{n-1}} \top \left(\top_{\alpha\in C'} x_\alpha\right)$. Une application répétée de l'associativité de la loi $\top$ et de la commutativité des éléments de la famille $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ livre

$$\top_{\alpha\in C} x_\alpha = \left(\top_{\alpha\in C'} x_\alpha\right) \top x_{\alpha_{n-1}}.$$

De plus, selon l'hypothèse de récurrence,

$$\top_{\alpha\in C'} x_\alpha = \top_{i=0}^{n-2} x_{\alpha_i}.$$

En appliquant le théorème d'associativité à l'intervalle $[\![0, n-1]\!]$ de $\mathbb{N}$, réunion de la séquence (B_1, B_2), où $B_1 = [\![0, n-2]\!]$ et $B_2 = \{n-1\}$, il en résulte que

$$\top_{\alpha\in C} x_\alpha = \left(\top_{i=0}^{n-2} x_{\alpha_i}\right) \top x_{\alpha_{n-1}} = \top_{i=0}^{n-1} x_{\alpha_i} = \top_{\alpha\in B} x_\alpha.$$

(c) Soit $0 < k < n-1$. Alors,

$$\top_{\alpha\in C} x_\alpha = x_{\alpha_k} \top \left(\top_{\alpha\in C'} x_\alpha\right).$$

Nous posons

$$P = \left\{\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}\right\} \qquad \text{et} \qquad Q = \left\{\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{n-1}\right\},$$

puis nommons B' l'ensemble $P \cup Q$ muni de l'ordre induit par l'ordre de B. Alors, l'hypothèse de récurrence livre

$$\mathop{\top}_{\alpha\in C'} x_\alpha = \mathop{\top}_{\alpha\in B'} x_\alpha,$$

puisque C' et B' sont des ensembles ordonnés ayant pour ensemble sous-jacent $P \cup Q$, avec $\mathbf{card}(P\cup Q) = n-1$. Au demeurant, B' est la réunion de la séquence (P, Q) et, pour l'ordre induit par B, les relations $\alpha \in P$ et $\beta \in Q$ entraînent $\alpha < \beta$. D'où

$$\mathop{\top}_{\alpha\in B'} x_\alpha = \left(\mathop{\top}_{\alpha\in P} x_\alpha\right) \top \left(\mathop{\top}_{\alpha\in Q} x_\alpha\right) = \left(\mathop{\top}_{i=0}^{k-1} x_{\alpha_i}\right) \top \left(\mathop{\top}_{i=k+1}^{n-1} x_{\alpha_i}\right),$$

d'après le théorème de l'associativité. Par conséquent,

$$\mathop{\top}_{\alpha\in C} x_\alpha = x_{\alpha_k} \top \left[\left(\mathop{\top}_{i=0}^{k-1} x_{\alpha_i}\right) \top \left(\mathop{\top}_{i=k+1}^{n-1} x_{\alpha_i}\right)\right].$$

Un usage répété de l'associativité de la loi $\top$ et de la commutativité des éléments de la famille $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ induit donc

$$\mathop{\top}_{\alpha\in C} x_\alpha = \left[x_{\alpha_k} \top \left(\mathop{\top}_{i=0}^{k-1} x_{\alpha_i}\right)\right] \top \left(\mathop{\top}_{i=k+1}^{n-1} x_{\alpha_i}\right) = \left[\left(\mathop{\top}_{i=0}^{k-1} x_{\alpha_i}\right) \top x_{\alpha_k}\right] \top \left(\mathop{\top}_{i=k+1}^{n-1} x_{\alpha_i}\right),$$

puis

$$\mathop{\top}_{\alpha\in C} x_\alpha = \left(\mathop{\top}_{i=0}^{k-1} x_{\alpha_i}\right) \top \left[x_{\alpha_k} \top \left(\mathop{\top}_{i=k+1}^{n-1} x_{\alpha_i}\right)\right] = \left(\mathop{\top}_{i=0}^{k-1} x_{\alpha_i}\right) \top \left(\mathop{\top}_{i=k}^{n-1} x_{\alpha_i}\right).$$

Par le théorème d'associativité, il en découle que

$$\mathop{\top}_{\alpha\in C} x_\alpha = \mathop{\top}_{i=0}^{n-1} x_{\alpha_i} = \mathop{\top}_{\alpha\in B} x_\alpha.$$

Le théorème 1 de commutativité est ainsi démontré. $\square$

✍

Donc, pour une loi associative $\top$ sur un ensemble E, le composé d'une famille finie $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ d'éléments *deux-à-deux permutables* de E est la valeur commune des composés de *toutes les séquences* obtenues en ordonnant totalement A de toutes les manières possibles.

Le théorème 2 suivant est la version du théorème d'associativité pour les séquences d'éléments deux-à-deux permutables.

Théorème 2.

Soit $\top$ une loi de composition associative sur E, puis $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille finie non vide d'éléments de E, deux-à-deux permutables. Si A est une réunion d'une famille de parties non vides $(B_i)_{i\in I}$, deux-à-deux disjointes, alors

$$\mathop{\top}_{\alpha\in A} x_\alpha = \mathop{\top}_{i\in I}\left(\mathop{\top}_{\alpha\in B_i} x_\alpha\right). \tag{3}$$

Démonstration :

Soit A une réunion d'une famille de parties non vides $(B_i)_{i\in I}$, deux-à-deux disjointes. De plus, soit $n = \mathbf{card}(A)$ et $p = \mathbf{card}(I)$. Alors, il existe une bijection f de $[\![0, p-1]\!]$ sur I, et un ordre total est défini sur I par $i < j$ si $f^{-1}(i) < f^{-1}(j)$. Pour simplifier les notations, nous posons maintenant $i_k = f(k)$ pour chaque $k \in [\![0, p-1]\!]$. Ainsi,

$$I = \left\{i_0, i_1, \ldots, i_{p-1}\right\} \qquad \text{et} \qquad i_0 < i_1 < \cdots < i_{p-1}.$$

Soit $n_k = \mathbf{card}(B_{i_k})$ pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$. Alors, $n_k \geqslant 1$ pour chaque k et

$$n = n_0 + n_1 + \cdots + n_{p-1} = \sum_{k=0}^{p-1} n_k,$$

car les B_{i_k} forment une partition de A. Donc, en posant

$$\mathbb{J}_0 = [\![0, n_0 - 1]\!]$$

et

$$\mathbb{J}_k = \left[\!\!\left[\sum_{\ell=0}^{k-1} n_\ell, \left(\sum_{\ell=0}^{k-1} n_\ell\right) + n_k - 1\right]\!\!\right]$$

pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, il existe une bijection g_k de $\mathbb{J}_k$ sur B_{i_k} pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$. De ce fait, une bijection g est définie de $[\![0, n-1]\!]$ sur A par

$$g(j) = g_k(j) \qquad \text{si} \qquad j \in \mathbb{J}_k.$$

Cette bijection permet de définir un ordre total comme suit : $\alpha < \beta$ si $g^{-1}(\alpha) < g^{-1}(\beta)$.

Compte tenu des deux ordres ainsi définis, $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une séquence d'éléments de E, où A est un ensemble fini non vide, totalement ordonné, réunion d'une séquence de parties non vides $(B_i)_{i\in I}$. Du reste, pour tout couple (i_1, i_2) d'éléments de I avec

$$k_1 = f^{-1}(i_1) \qquad \text{et} \qquad k_2 = f^{-1}(i_2),$$

nous avons

$$B_{i_1} = B_{k_1} = g_{k_1}^{-1}(\mathbb{J}_{k_1}) \qquad \text{et} \qquad B_{i_2} = B_{k_2} = g_{k_2}^{-1}(\mathbb{J}_{k_2}).$$

Cependant, par définition, si $i_1 < i_2$, alors $f^{-1}(i_1) < f^{-1}(i_2)$, c'est-à-dire $k_1 < k_2$. Les relations $\alpha \in B_{i_1}$ et $\beta \in B_{i_2}$, puis $i_1 < i_2$, entraînent donc $\alpha < \beta$. Eu égard au théorème d'associativité, il en résulte que

$$\mathop{\top}_{\alpha\in A} x_\alpha = \mathop{\top}_{i\in I}\left(\mathop{\top}_{\alpha\in B_i} x_\alpha\right).$$

Le théorème de commutativité assure que la valeur des divers composés de l'égalité précédente est indépendante du choix de l'ordre sur I et sur A. □

Deux corollaires du théorème 2 ainsi démontré retiennent notre attention ici.

Corollaire 1.

Soit $\top$ une loi associative sur E, puis $(x_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in A\times B}$ une famille finie non vide d'éléments de E, deux-à-deux permutables, où A et B sont des ensembles finis non vides. Alors,

$$\mathop{\top}_{(\alpha,\beta)\in A\times B} x_{\alpha\beta} = \mathop{\top}_{\alpha\in A}\left(\mathop{\top}_{\beta\in B} x_{\alpha\beta}\right) = \mathop{\top}_{\beta\in B}\left(\mathop{\top}_{\alpha\in A} x_{\alpha\beta}\right). \tag{4}$$

Démonstration :

Le résultat résulte du théorème 2 en considérant le produit scalaire $A\times B$ comme réunion des ensembles $\{\alpha\}\times B$ d'une part, et des ensembles $A\times\{\beta\}$ d'autre part. □

Corollaire 2.

Soit $\top$ une loi associative sur E. Soient $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ et $(y_\alpha)_{\alpha\in A}$ deux familles non vides d'éléments de E, telles que les x_α et y_α soient *deux-à-deux permutables.* Alors,

$$\mathop{\top}_{\alpha\in A}(x_\alpha \top y_\alpha) = \left(\mathop{\top}_{\alpha\in A} x_\alpha\right)\top\left(\mathop{\top}_{\alpha\in A} y_\alpha\right). \tag{5}$$

Démonstration :

Nous posons $B = \{1,2\}$, puis $z_{\alpha 1} = x_\alpha$ et $z_{\alpha 2} = y_\alpha$. Alors,

$$\mathop{\top}_{\alpha\in A}\left(\mathop{\top}_{\beta\in B} z_{\alpha\beta}\right) = \mathop{\top}_{\alpha\in A}(z_{\alpha 1}\top z_{\alpha 2}) = \mathop{\top}_{\alpha\in A}(x_\alpha\top y_\alpha)$$

et

$$\mathop{\top}_{\beta\in B}\left(\mathop{\top}_{\alpha\in A} z_{\alpha\beta}\right) = \left(\mathop{\top}_{\alpha\in A} z_{\alpha 1}\right)\top\left(\mathop{\top}_{\alpha\in A} z_{\alpha 2}\right) = \left(\mathop{\top}_{\alpha\in A} x_\alpha\right)\top\left(\mathop{\top}_{\alpha\in A} y_\alpha\right).$$

Ceci entraîne l'égalité (5), compte tenu du corollaire 1. □

3. L'endomorphisme puissance d'un magma associatif et commutatif

Dans cette section, nous démontrons que, pour un magma associatif et commutatif, la formation des puissances n-ièmes, pour un entier naturel non nul n donné, définit un endomorphisme dudit magma.

Proposition 1.

Soit $\top$ une loi de composition associative et commutative sur un ensemble E, et n un entier naturel non nul. Alors, l'application φ définie de E dans E par

$$\varphi(x) = \mathop{\top}^{n} x$$

est un morphisme.

Démonstration :

Soient des éléments x et y de E. De plus, nous posons $x_i = x$ et $y_i = y$ pour tout entier naturel i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant n$. Alors,

$$\varphi(x \top y) = \mathop{\top}^{n} (x \top y) = \mathop{\top}_{i=1}^{n} (x_i \top y_i).$$

D'après le corollaire 2 ci-dessus, nous avons cependant

$$\mathop{\top}_{i=1}^{n} (x_i \top y_i) = \left(\mathop{\top}_{i=1}^{n} x_i \right) \top \left(\mathop{\top}_{i=1}^{n} y_i \right) = \left(\mathop{\top}^{n} x \right) \top \left(\mathop{\top}^{n} y \right) = \varphi(x) \top \varphi(y).$$

De ce fait, $\varphi(x \top y) = \varphi(x) \top \varphi(y)$ pour tout couple (x, y) d'éléments de E. $\square$

Références

[1] N. Bourbaki, **Algèbre : Chapitres 1 à 3**, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007.

[2] N. Bourbaki, **Théorie des ensembles**, Springer, Berlin, Heidelberg, 2006.