Une famille d'anneaux de Boole et leurs idéaux

Christian V. Nguembou Tagne

5 juin 2021

Soit E un ensemble et $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de ses parties. Dans cette note, nous allons montrer que $\mathscr{P}(E)$, muni de la différence symétrique Δ et de l'intersection $\cap$, est un *anneau unitaire commutatif*. Nous allons par ailleurs nous interroger sur l'intégrité de cet anneau, puis étudier la forme de ses idéaux.

Avant d'entrer dans le vif du sujet, nous rappelons quelques résultats de la théorie élémentaire des ensembles, qui seront mis à contribution dans nos développements.

✍

Sur la classe des ensembles, l'intersection $\cap$ et la réunion $\cup$ définissent des opérations. Chacune de ses deux opérations est *commutative* et *associative*. En d'autres termes,

$$X \cap Y = Y \cap X \qquad \text{et} \qquad X \cup Y = Y \cup X$$

pour tout couple d'ensembles (X, Y), tandis que

$$X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z \qquad \text{et} \qquad X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$$

pour chaque triplet d'ensembles (X, Y, Z).

✍ **(Lois de distributivité)**

Pour tout triplet d'ensembles (X, Y, Z), nous avons

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \qquad \text{et} \qquad X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z).$$

Soient X et Y deux ensembles. La **différence** de X et Y, symbolisée par $X \setminus Y$, est l'ensemble des éléments de X qui n'appartiennent pas à Y. En termes formels,

$$X \setminus Y = \Big\{ x \in X \mid x \notin Y \Big\}.$$

Dans le cas particulier où Y est une partie de X, la différence $X \setminus Y$ est appelée **complémentaire** de Y dans X. Lorsque des opérations sont réalisées sur des parties d'un ensemble de référence E. Le complémentaire de $E \setminus X$ de toute partie X de E est noté de manière simplifiée $\overline{X}$. Ainsi,

$$\overline{\overline{X}} = X \qquad \text{et} \qquad X \cap \overline{X} = \emptyset.$$

En outre,

$$X \setminus Y = X \cap \overline{Y}$$

pour tout couple (X, Y) de sous-ensembles de E.

> ✍ **(Lois de De Morgan)**
>
> Soient X et Y des sous-ensembles d'un ensemble de référence E. Alors,
>
> $$\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y} \qquad \text{et} \qquad \overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}.$$

La **différence symétrique** de deux ensembles X et Y est l'ensemble noté $X \Delta Y$ et constitué des éléments appartenant, soit à X, soit à Y, mais pas simultanément à X et à Y. Autrement dit,

$$X \Delta Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y) = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X).$$

Dans le cas particulier où X et Y sont des parties d'un ensemble de référence E, nous avons également

$$X \Delta Y = \left(X \cap \overline{Y} \right) \cup \left(Y \cap \overline{X} \right).$$

1. L'anneau de Boole sur l'ensemble des parties d'un ensemble

Soit E un ensemble et $A = \mathscr{P}(E)$. Dans cette section, nous allons montrer que le triplet $(A, \Delta, \cap)$ est un *anneau unitaire commutatif*, puis étudier les conditions d'*intégrité* de cet anneau.

Preuve de la validité des propriétés

Associativité de Δ

Soient X, Y et Z des parties de l'ensemble E. Alors,

$$X \Delta (Y \Delta Z) = \left[X \cap \overline{Y \Delta Z} \right] \cup \left[(Y \Delta Z) \cap \overline{X} \right].$$

Par ailleurs, les *lois de De Morgan* et de *distributivité* livrent

$$\begin{aligned}
X\cap\overline{Y\Delta Z} &= X\cap\overline{\left(Y\cap\overline{Z}\right)\cup\left(Z\cap\overline{Y}\right)} = X\cap\left[\overline{Y\cap\overline{Z}}\cap\overline{Z\cap\overline{Y}}\right]\\
&= X\cap\left[\left(\overline{Y}\cup\overline{\overline{Z}}\right)\cap\left(\overline{Z}\cup\overline{\overline{Y}}\right)\right]\\
&= X\cap\left[\left(\overline{Y}\cup Z\right)\cap\left(\overline{Z}\cup Y\right)\right]\\
&= X\cap\left(\left[\left(\overline{Y}\cup Z\right)\cap\overline{Z}\right]\cup\left[\left(\overline{Y}\cup Z\right)\cap Y\right]\right)\\
&= X\cap\left(\left[\left(\overline{Y}\cap\overline{Z}\right)\cup\left(Z\cap\overline{Z}\right)\right]\cup\left[\left(\overline{Y}\cap Y\right)\cup(Z\cap Y)\right]\right)\\
&= X\cap\left(\left[\left(\overline{Y}\cap\overline{Z}\right)\cup\emptyset\right]\cup\left[\emptyset\cup(Z\cap Y)\right]\right)\\
&= X\cap\left[\left(\overline{Y}\cap\overline{Z}\right)\cup(Z\cap Y)\right]\\
&= \left[X\cap\left(\overline{Y}\cap\overline{Z}\right)\right]\cup\left[X\cap(Z\cap Y)\right]\\
&= \left(X\cap\overline{Y}\cap\overline{Z}\right)\cup\left(X\cap Y\cap Z\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(Y\Delta Z)\cap\overline{X} = \left[\left(Y\cap\overline{Z}\right)\cup\left(Z\cap\overline{Y}\right)\right]\cap\overline{X} &= \left[\left(Y\cap\overline{Z}\right)\cap\overline{X}\right]\cup\left[\left(Z\cap\overline{Y}\right)\cap\overline{X}\right]\\
&= \left(Y\cap\overline{X}\cap\overline{Z}\right)\cup\left(Z\cap\overline{X}\cap\overline{Y}\right).
\end{aligned}$$

Ceci entraîne

$$X\Delta(Y\Delta Z) = \left(X\cap Y\cap Z\right)\cup\left(X\cap\overline{Y}\cap\overline{Z}\right)\cup\left(Y\cap\overline{X}\cap\overline{Z}\right)\cup\left(Z\cap\overline{X}\cap\overline{Y}\right). \tag{$\dagger$}$$

Au demeurant,

$$(X\Delta Y)\Delta Z = \left[(X\Delta Y)\cap\overline{Z}\right]\cup\left[Z\cap\overline{X\Delta Y}\right],$$

puis

$$\begin{aligned}
(X\Delta Y)\cap\overline{Z} = \left[\left(X\cap\overline{Y}\right)\cup\left(Y\cap\overline{X}\right)\right]\cap\overline{Z} &= \left[\left(X\cap\overline{Y}\right)\cap\overline{Z}\right]\cup\left[\left(Y\cap\overline{X}\right)\cap\overline{Z}\right]\\
&= \left(X\cap\overline{Y}\cap\overline{Z}\right)\cup\left(Y\cap\overline{X}\cap\overline{Z}\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
Z\cap\overline{X\Delta Y} &= Z\cap\overline{\left(X\cap\overline{Y}\right)\cup\left(Y\cap\overline{X}\right)} = Z\cap\left[\overline{X\cap\overline{Y}}\cap\overline{Y\cap\overline{X}}\right]\\
&= Z\cap\left[\left(\overline{X}\cup Y\right)\cap\left(\overline{Y}\cup X\right)\right]\\
&= Z\cap\left(\left[\left(\overline{X}\cup Y\right)\cap\overline{Y}\right]\cup\left[\left(\overline{X}\cup Y\right)\cap X\right]\right)\\
&= Z\cap\left(\left[\left(\overline{X}\cap\overline{Y}\right)\cup\left(Y\cap\overline{Y}\right)\right]\cup\left[\left(\overline{X}\cap X\right)\cup(Y\cap X)\right]\right)\\
&= Z\cap\left[\left(\overline{X}\cap\overline{Y}\right)\cup(Y\cap X)\right]\\
&= \left[Z\cap\left(\overline{X}\cap\overline{Y}\right)\right]\cup\left[Z\cap(Y\cap X)\right]\\
&= \left(Z\cap\overline{X}\cap\overline{Y}\right)\cup\left(X\cap Y\cap Z\right).
\end{aligned}$$

De ce fait,

$$(X\Delta Y)\Delta Z = \Big(X\cap Y\cap Z\Big)\cup\Big(X\cap\overline{Y}\cap\overline{Z}\Big)\cup\Big(Y\cap\overline{X}\cap\overline{Z}\Big)\cup\Big(Z\cap\overline{X}\cap\overline{Y}\Big).$$

Compte tenu de l'égalité (†), il en résulte que

$$X\Delta(Y\Delta Z) = (X\Delta Y)\Delta Z.$$

Commutativité de Δ

Soient X et Y des sous-ensembles de E. Alors,

$$X\Delta Y = (X\setminus Y)\cup(Y\setminus X) = (Y\setminus X)\cup(X\setminus Y) = Y\Delta X.$$

Élément neutre pour Δ

Soit X une partie de E. Alors, $X\Delta\emptyset = \emptyset\Delta X = (\emptyset\setminus X)\cup(X\setminus\emptyset) = \emptyset\cup X = X$. L'*ensemble vide* est donc élément neutre pour la loi Δ.

Inversibilité pour Δ

Soit X une partie de E. Alors, $X\Delta X = (X\setminus X)\cup(X\setminus X) = \emptyset\cup\emptyset = \emptyset$. Ceci signifie que tout élément de $A = \mathscr{P}(E)$ est inversible pour la loi Δ, et est son propre inverse.

Associativité et commutativité de la loi $\cap$

L'intersection est notoirement associative et commutative sur la classe des ensembles. Elle l'est donc en particulier sur $A = \mathscr{P}(E)$ pour chaque ensemble E.

Élément neutre pour $\cap$

Soit X une partie de E. Alors, $X\cap E = E\cap X = X$. De ce fait, l'élément E de $A = \mathscr{P}(E)$ est neutre pour la loi $\cap$.

Distributivité de $\cap$ par rapport à Δ

Soient X, Y et Z des parties de l'ensemble E. Alors,

$$\begin{aligned} X\cap(Y\Delta Z) &= X\cap\Big[\Big(Y\cap\overline{Z}\Big)\cup\Big(Z\cap\overline{Y}\Big)\Big] = \Big[X\cap\Big(Y\cap\overline{Z}\Big)\Big]\cup\Big[X\cap\Big(Z\cap\overline{Y}\Big)\Big] \\ &= \Big[(X\cap Y)\cap\overline{Z}\Big]\cup\Big[(X\cap Z)\cap\overline{Y}\Big]. \end{aligned}$$

Cependant,

$$\begin{aligned}(X\cap Y)\Delta(X\cap Z) &= \left[(X\cap Y)\cap\overline{X\cap Z}\right]\cup\left[(X\cap Z)\cap\overline{X\cap Y}\right]\\ &= \left[(X\cap Y)\cap\left(\overline{X}\cup\overline{Z}\right)\right]\cup\left[(X\cap Z)\cap\left(\overline{X}\cup\overline{Y}\right)\right]\\ &= \left(\left[(X\cap Y)\cap\overline{X}\right]\cup\left[(X\cap Y)\cap\overline{Z}\right]\right)\cup\left(\left[(X\cap Z)\cap\overline{X}\right]\cup\left[(X\cap Z)\cap\overline{Y}\right]\right)\\ &= \left(\emptyset\cup\left[(X\cap Y)\cap\overline{Z}\right]\right)\cup\left(\emptyset\cup\left[(X\cap Z)\cap\overline{Y}\right]\right)\\ &= \left[(X\cap Y)\cap\overline{Z}\right]\cup\left[(X\cap Z)\cap\overline{Y}\right].\end{aligned}$$

D'où

$$X\cap(Y\Delta Z)=(X\cap Y)\Delta(X\cap Z).$$

Ceci montre que l'intersection $\cap$ est distributive à *gauche* par rapport à Δ. Dans la mesure où l'intersection est une loi commutative, il en découle qu'elle est également distributive à *droite* par rapport à Δ.

Donc, $(A,\Delta,\cap)$ est un *anneau unitaire commutatif* d'élément nul $\emptyset$ et d'unité E.

> ✍
>
> Un anneau unitaire $(A,+,\cdot)$ est dit **de Boole** si $a\cdot a=a$ pour tout $a\in A$.

L'anneau unitaire commutatif $\left(\mathscr{P}(E),\Delta,\cap\right)$, étudié ici, est de Boole, car $X\cap X=X$ pour chaque $X\in\mathscr{P}(E)$.

Au sujet des anneaux de Boole, il convient de relever le résultat suivant :

> ✍
>
> Tout anneau de Boole $(A,+,\cdot)$ est commutatif.

En effet, étant donné un anneau de Boole $(A,+,\cdot)$ d'élément nul 0 et d'unité 1, si a, b et x sont des éléments de A, alors

$$\begin{aligned}x+1=(x+1)\cdot(x+1)=x\cdot(x+1)+1\cdot(x+1) &= (x\cdot x)+(x\cdot 1)+(1\cdot x)+(1\cdot 1)\\ &= x+x+x+1\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}a+b=(a+b)\cdot(a+b)=a\cdot(a+b)+b\cdot(a+b) &= (a\cdot a)+(a\cdot b)+(b\cdot a)+(b\cdot b)\\ &= a+(a\cdot b)+(b\cdot a)+b.\end{aligned}$$

Ceci induit $0=x+x$ et $0=(a\cdot b)+(b\cdot a)$. En remplaçant x par $a\cdot b$, nous obtenons ainsi

$$(a\cdot b)+(a\cdot b)=(a\cdot b)+(b\cdot a),$$

et donc $a\cdot b=b\cdot a$.

Condition d'intégrité de cet anneau de Boole

Définition 1.

Un anneau unitaire commutatif $(A, +, \cdot)$, d'élément nul 0 est dit **intègre** si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(1) L'ensemble A n'est pas un singleton.

(2) Pour tout couple (a, b) d'éléments de A, l'égalité $a \cdot b = 0$ entraîne $a = 0$ ou $b = 0$.

Notons au passage que la condition **(2)** est équivalente à la suivante : Pour tout couple (a, b) d'éléments de A, si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, alors $a \cdot b \neq 0$.

L'anneau unitaire commutatif $(A, \Delta, \cap)$, où $A = \mathscr{P}(E)$, est-il intègre ? Pour répondre à cette question, nous allons faire une discussion sur le nombre d'éléments de E.

Si $E = \emptyset$, alors $A = \Big\{\emptyset\Big\}$.

Si E est un singleton, alors $A = \Big\{\emptyset, E\Big\}$ et, pour tout couple (X, Y) d'éléments de A, si $X \cap Y = \emptyset$, alors $X = \emptyset$ ou $Y = \emptyset$.

Si E contient deux éléments distincts x et y, alors $\{x\}$ et $\{y\}$ sont manifestement des éléments de A, distincts de $\emptyset$, tels que $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$.

Il en résulte que l'anneau unitaire commutatif $(A, \Delta, \cap)$, où $A = \mathscr{P}(E)$, est *intègre* si et seulement si E est un *singleton*.

2. Deux propriétés des idéaux de cet anneau de Boole

Définition 2.

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau unitaire commutatif. Une partie I de A est appelée **idéal** de $(A, +, \cdot)$ si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$(\mathbf{I_1})$ I est un sous-groupe de $(A, +)$.

$(\mathbf{I_2})$ Si $x \in I$ et $a \in A$, alors $x \cdot a \in I$.

Soit I un idéal de l'anneau $(A, \Delta, \cap)$, où $A = \mathscr{P}(E)$. Nous allons démontrer les propriétés suivantes :

$(\mathbf{P_1})$ Si $X \in I$ et $Y \subset X$, alors $Y \in I$.

$(\mathbf{P_2})$ Si $X \in I$ et $Y \in I$, alors $X \cup Y \in I$.

Soit $X \in I$ et $Y \subset X$. Alors, $Y = X \cap Y$ et $Y \in A$. Or, d'après la condition ($\mathbf{I_2}$), nous avons $X \cap Y \in I$. D'où $Y \in I$. La propriété ($\mathbf{P_1}$) est ainsi démontrée.

Soient X et Y des éléments de I. Alors, $X\Delta Y \in I$, car I est un sous-groupe de (A, Δ). Du reste, $X \cap Y \in I$, en vertu de la condition ($\mathbf{I_2}$). Il en résulte que

$$(X\Delta Y)\Delta(X \cap Y) \in I.$$

Cependant, $X\Delta Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$. De ce fait, $(X\Delta Y) \cap (X \cap Y) = \emptyset$. Ceci entraîne

$$(X\Delta Y) \setminus (X \cap Y) = X\Delta Y \qquad \text{et} \qquad (X \cap Y) \setminus (X\Delta Y) = X \cap Y,$$

puis

$$\begin{aligned}(X\Delta Y)\Delta(X \cap Y) = \Big[(X\Delta Y) \setminus (X \cap Y)\Big] \cup \Big[(X \cap Y) \setminus (X\Delta Y)\Big] &= (X\Delta Y) \cup (X \cap Y) \\ &= X \cup Y.\end{aligned}$$

Par conséquent, $X \cup Y \in I$. La propriété ($\mathbf{P_2}$) est ainsi démontrée.

Cette propriété ($\mathbf{P_2}$) permet d'établir par induction que toute réunion finie d'éléments de l'idéal I appartient à I. Autrement dit, la propriété suivante est satisfaite :

> ($\mathbf{P_3}$) Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des éléments de I, alors $(X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n) \in I$.

3. Forme des idéaux de cet anneau de Boole dans le cas fini

Dans toute cette section, soit E un ensemble *fini*, $A = \mathscr{P}(E)$ et I un idéal de l'anneau $(A, \Delta, \cap)$. Alors, A est un ensemble fini et I est une partie non-vide de E. De ce fait, il existe un entier naturel non nul n, puis des parties $X_1, \ldots, X_n$ de E telles que

$$I = \Big\{X_1, \ldots, X_n\Big\}.$$

Nous posons $E' = X_1 \cup \cdots \cup X_n$. Alors, chacun des $X_1, \ldots, X_n$ est un sous ensemble de E'. Ceci entraîne $I \subset \mathscr{P}(E')$. Au demeurant, $E' \in I$, compte tenu de la propriété ($\mathbf{P_3}$) ci-dessus. En vertu de la propriété ($\mathbf{P_1}$), il en résulte que toute partie E' appartient à I. Autrement dit, $\mathscr{P}(E') \subset I$. Tout compte fait, nous obtenons

$$I = \mathscr{P}(E').$$

> Ainsi, pour E *fini*, si I est un idéal de l'anneau $(A, \Delta, \cap)$, alors il existe une partie E' de E telle que $I = \mathscr{P}(E')$.

La réciproque de cette implication est-elle vraie ? En d'autres termes, pour toute partie E' de E, l'ensemble $\mathscr{P}(E')$ est-il un idéal de l'anneau $(A, \Delta, \cap)$? À cette question, la section 4 ci-dessous répond par l'affirmative.

4. Ensemble de tous les idéaux de cet anneau de Boole dans le cas fini

Soit E un ensemble quelconque (*fini* ou *infini*), $A = \mathscr{P}(E)$ et E' une partie de E.

Alors, $\emptyset \in \mathscr{P}(E')$. De plus, si $X \in \mathscr{P}(E')$ et $Y \in \mathscr{P}(E')$, alors $X\Delta Y \in \mathscr{P}(E')$, car

$$X\Delta Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y) \subset X \cup Y \subset E'.$$

Nous rappelons en outre que chaque élément de A est son propre inverse pour la loi Δ. L'inverse de tout $X \in \mathscr{P}(E')$ pour Δ appartient donc à $\mathscr{P}(E')$. De ce fait, $\mathscr{P}(E')$ est un sous-groupe de (A, Δ).

Par ailleurs, si $X \in \mathscr{P}(E')$ et $Y \in A$, alors $X \cap Y \subset X \subset E'$, et donc $X \cap Y \in \mathscr{P}(E')$.

Par conséquent, $\mathscr{P}(E')$ est un idéal de l'anneau $(A, \Delta, \cap)$.

> Pour E fini, une partie I de A est un *idéal* de l'anneau $(A, \Delta, \cap)$ si et seulement s'il existe une partie E' de E telle que $I = \mathscr{P}(E')$.

Autrement dit, si E est un ensemble *fini*, chaque idéal de l'anneau $(A, \Delta, \cap)$ a la forme $\mathscr{P}(E')$, où E' est une partie de E. Ce résultat n'est plus satisfait lorsque l'ensemble E est *infini*. En effet, pour E *infini*, les $\mathscr{P}(E')$ sont certes des idéaux de l'anneau $(A, \Delta, \cap)$, mais il y en a d'autres. L'exemple exhibé dans la section 5 ci-dessous permet de s'en convaincre.

5. Un idéal de cet anneau de Boole dans le cas infini

Soit E un ensemble *infini*, $A = \mathscr{P}(E)$ et I la partie de A constituée de tous les *sous-ensembles finis* de E. Alors, I contient l'ensemble $S = \Big\{\{x\} \mid x \in E\Big\}$ des singletons de A. Cet ensemble S est infini, de même cardinal que E, puisque l'application de E dans S, associant x à $\{x\}$, est bijective. Il en résulte que l'ensemble I est *infini*.

Au demeurant, l'ensemble vide étant fini, nous avons $\emptyset \in I$. Par ailleurs, si $X \in I$ et $Y \in I$, alors $X\Delta Y \in I$; en effet, $X\Delta Y$ est une partie finie de E, en tant que sous-ensemble de la réunion de deux parties finies de E ; précisément,

$$X\Delta Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y) \subset X \cup Y.$$

De plus, l'inverse de tout élément de I pour Δ étant lui-même, il appartient à I. De ce fait, I est un sous-groupe de (A, Δ).

En outre, si $X \in I$ et $Y \in A$, alors $X \cap Y \in I$, car $X \cap Y \subset X$ et X est une partie finie de E. Par conséquent, I est un idéal de l'anneau $(A, \Delta, \cap)$.

À présent, nous supposons qu'il existe une partie de E' de E telle que $I = \mathscr{P}(E')$. Alors, $E' \in I$. Ainsi, E' est une partie finie de E. Ceci induit que l'ensemble $I = \mathscr{P}(E')$ est fini : une contradiction. Donc, $I \neq \mathscr{P}(E')$ pour toute partie E' de E.