Endomorphismes nilpotents d'indice 2 en dimension finie

Christian V. Nguembou Tagne

17 juin 2021

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$.

Dans cet article, nous donnons quelques propriétés des endomorphismes sur E, **nilpotent d'ordre** 2, c'est-à-dire les endomorphismes u de E, non nuls, vérifiant $u^2 = 0$.

Précisément, nous allons montrer que le noyau d'un tel endomorphisme contient son image. Ensuite, nous donnerons les valeurs possibles des dimensions de son noyau et de son image.

Les matrices des endomorphismes de caractéristique 2 ont une forme réduite marquante que nous dévoilons pour le cas particulier où $n = 3$ et pour le cas général.

1. Sur l'inclusion de l'image dans le noyau

Soit u un endomorphisme de E, non nul, et vérifiant $u^2 = 0$. Du reste, soit y un vecteur de E contenu dans l'image de u. Alors, il existe un vecteur $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Ainsi, $u(y) = u(u(x)) = u^2(x) = 0$. Le vecteur y appartient au noyau de u.

> ✍
>
> Par conséquent, pour tout endomorphisme non nul u de E tel que $u^2 = 0$, nous avons
>
> $$\operatorname{Im} u \subset \ker u.$$

2. Dimensions possibles du noyau et de l'image

Soit u un endomorphisme non nul de E tel que $u^2 = 0$. Alors, $\dim(\ker u) < n$; le contraire induirait en effet $\ker u = E$, et donc $u = 0$. De plus, selon le **théorème du rang**,

$$\dim(\ker u) = \dim(E) - \dim(\operatorname{Im} u) = n - \dim(\operatorname{Im} u).$$

Cependant, $\operatorname{Im} u \subset \ker u$. D'où $\dim(\operatorname{Im} u) \leq \dim(\ker u)$, c'est-à-dire

$$-\dim(\operatorname{Im} u) \geq -\dim(\ker u),$$

Ceci entraîne $\dim(\ker u) \geq n - \dim(\ker u)$, et donc $\dim(\ker u) \geq \frac{n}{2}$.

Au demeurant, $\dim(\operatorname{Im} u) > 0$, car le contraire impliquerait

$$\dim(\operatorname{Im} u) = 0 \qquad \text{et} \qquad \dim(\ker u) = n,$$

puis $\ker u = E$ et $u = 0$. Par ailleurs, $\dim(\operatorname{Im} u) = n - \dim(\ker u) \leq n - \dim(\operatorname{Im} u)$. D'où

$$\dim(\operatorname{Im} u) \leq \frac{n}{2}.$$

✍

Par conséquent, pour tout endomorphisme u non nul de E tel que $u^2 = 0$, nous avons

$$\frac{n}{2} \leq \dim(\ker u) \leq n - 1 \tag{$\star$}$$

et

$$1 \leq \dim(\operatorname{Im} u) \leq \frac{n}{2}. \tag{$\star\star$}$$

3. Matrice réduite en dimension 3

Dans cette section, nous supposons que l'espace vectoriel E est de dimension 3. Alors, pour un endomorphisme non nul u de E vérifiant $u^2 = 0$, les inégalités ($\star$) et ($\star\star$) livrent

$$\frac{3}{2} \leq \dim(\ker u) \leq 2 \qquad \text{et} \qquad 1 \leq \dim(\operatorname{Im} u) \leq \frac{3}{2}.$$

Ainsi, $\dim(\operatorname{Im} u) = 1$ et $\dim(\ker u) = 2$. Maintenant, soit e_1 un vecteur générateur de $\operatorname{Im} u$. Alors, d'après le **théorème de la base incomplète**, il existe un vecteur e_2 tel que (e_1, e_2) soit une base de $\ker u$. De même, il existe un vecteur e_3', n'appartenant pas à $\ker u$, tel que la famille (e_1, e_2, e_3') soit une base de E. Cependant, puisque $u(e_3')$ appartient à l'image de u, il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tel que $u(e_3') = \lambda e_1$; en effet, e_1 est un vecteur générateur de $\operatorname{Im} u$. Soit $e_3 = \frac{1}{\lambda} e_3'$. Alors, la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E. Du reste,

$$u(e_1) = 0, \qquad u(e_2) = 0 \qquad \text{et} \qquad u(e_3) = e_1.$$

✍

Par conséquent, la matrice de u relativement à la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Matrice réduite dans le cas général

Dans cette section, nous revenons au cas général où la dimension n de E est quelconque. Soit u un endomorphisme non nul de E tel que $u^2 = 0$ et $\dim(\ker u) = p$. Alors, les résultats démontrés précédemment entraînent

$$p < n \qquad \text{et} \qquad \dim(\operatorname{Im} u) = n - p \leq p.$$

Soit $(e_1, \dots, e_{n-p})$ une base de l'image de u. Alors, dans la mesure où $\operatorname{Im} u \subset \ker u$, et d'après **théorème de la base incomplète**, cette base de $\operatorname{Im} u$ peut être complétée de manière à obtenir une base $(e_1, \dots, e_{n-p}, \dots, e_p)$ de $\ker u$. Dans le même esprit, nous complétons la base de $\ker u$ ainsi obtenue en une base

$$(e_1, \dots, e_{n-p}, \dots, e_p, e'_{p+1}, \dots, e'_n)$$

de E. En outre, pour tout $j \in \{1, \cdots, n-p\}$, il existe un $(n-p)$-uplet $(a_{j1}, \dots, a_{j,n-p})$ appartenant à $\mathbb{K}^{n-p}$ tel que

$$u(e'_{p+j}) = a_{j1}e_1 + \cdots + a_{j,n-p}e_{n-p}.$$

Ainsi,

$$\begin{bmatrix} u(e'_{p+1}) \\ \vdots \\ u(e'_{p+j}) \\ \vdots \\ u(e'_n) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ e_{n-p} \end{bmatrix},$$

où A est la matrice carrée de $\mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ donnée par

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{j,n-p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-p,1} & a_{n-p,2} & \cdots & a_{n-p,n-p} \end{bmatrix}.$$

Cette matrice A est inversible, car le contraire contredirait l'indépendance des vecteurs de la base

$$(e_1, \dots, e_{n-p}, \dots, e_p, e'_{p+1}, \dots, e'_n)$$

de E. En posant,

$$\begin{bmatrix} e_{p+1} \\ \vdots \\ e_{p+j} \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} e'_{p+1} \\ \vdots \\ e'_{p+j} \\ \vdots \\ e'_n \end{bmatrix},$$

nous obtenons une autre base

$$\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_{n-p}, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$$

de E, qui vérifie $u(e_i) = 0$ pour chaque $i \in \{1, \ldots, n-p, \ldots, p\}$, puis

$$\begin{bmatrix} u(e_{p+1}) \\ \vdots \\ u(e_{p+j}) \\ \vdots \\ u(e_n) \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} u(e'_{p+1}) \\ \vdots \\ u(e'_{p+j}) \\ \vdots \\ u(e'_n) \end{bmatrix} = A^{-1}A \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ e_{n-p} \end{bmatrix} = \mathbf{1}_{n-p} \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ e_{n-p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ e_{n-p} \end{bmatrix},$$

et donc $u(e_{p+j}) = e_j$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n-p\}$.

> ✍
>
> De ce fait, la matrice de u relativement à la base $\mathcal{B}$ est
>
> $$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n-p,p} & \mathbf{1}_{n-p} \\ \mathbf{0}_p & \mathbf{0}_{p,n-p} \end{bmatrix}.$$