Exercice d'algèbre matricielle

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, puis soient m et n des entiers naturels non nuls.

(1) Soient des matrices $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, c'est-à-dire des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$, d'ordres respectifs (m, n) et (n, m). Démontrez que

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$

Déduisez-en qu'il n'existe pas de matrices X et Y de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$, telles que

$$XY - YX = \mathbf{1}_n,$$

où $\mathbf{1}_n$ est la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

(2) Résolvez l'équation

$$X^2 - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = \mathbf{0}_2,$$

d'inconnue $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$, où α est une constante appartenant à $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et $\mathbf{0}_2$ la matrice nulle de $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$.

(3) Soit λ un réel fixé. Donnez des exemples de matrices carrées J, J', A et B, à coefficients dans $\mathbb{R}$, telles que :

- **(a)** $J - \lambda\mathbf{1}_2$ et $J' - \lambda\mathbf{1}_3$ soient nilpotentes d'indices de nilpotence respectifs 2 et 3 ;
- **(b)** $(A - \mathbf{1}_4)^3(A + 2\mathbf{1}_4) = \mathbf{0}_4$ avec A diagonale par blocs, mais $(A - \mathbf{1}_4)^2$ non diagonale ;
- **(c)** $(B - \mathbf{1}_4)^2(B + 2\mathbf{1}_4)^2 = \mathbf{0}_4$ avec $(B - \mathbf{1}_4)(B + 2\mathbf{1}_4) \neq \mathbf{0}_4$.

(4) Soit N une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $N^m = \mathbf{0}_n$ pour un entier naturel $m \geq 2$. Montrez que $\mathbf{1}_n - N$ est inversible et donnez l'expression de son inverse $(\mathbf{1}_n - N)^{-1}$.