$\mathbb{K}$-algèbre des matrices carrées

Sous-ensembles et sous-espaces

Christian V. Nguembou Tagne

5 juin 2021

Soient n et p des entiers naturels non nuls, et soit $\mathbb{K}$ un ensemble. On appelle **matrice de type** (n,p), ou **matrice à** n **lignes et** p **colonnes**, **à coefficients dans** $\mathbb{K}$, toute famille d'éléments de $\mathbb{K}$ dont l'ensemble d'indices est le produit cartésien $\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,p\}$, c'est-à-dire toute famille

$$A=(a_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$$

d'éléments de $\mathbb{K}$ avec $I=\{1,\dots,n\}$ et $J=\{1,\dots,p\}$. Cette matrice peut également être symbolisée par

$$A=(a_{ij})_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq p},$$

ou simplement par $A=(a_{ij})$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

L'ensemble des matrices de type (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

En particulier, une matrice de type (n,n) est appelée **matrice carrée d'ordre** n et l'ensemble $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est désigné de manière simplifiée par $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Chaque matrice de type (n,p) peut également être représentée par un tableau à n lignes et p colonnes :

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np}\end{bmatrix}.$$

Dans la suite de cette note, l'ensemble $\mathbb{K}$ est muni d'une structure de corps.

Dans l'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la **somme de deux matrices** est définie par

$$(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij});$$

tandis que la **multiplication d'une matrice par un scalaire** $\lambda\in\mathbb{K}$ est donnée par

$$\lambda\cdot(a_{ij})=(\lambda a_{ij}).$$

✍

Muni de cette addition et de cette multiplication externe, l'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un **$\mathbb{K}$-espace vectoriel** de dimension np.

Le **produit** d'une matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice $B = (b_{ij})$ de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est une matrice $C = (c_{ij})$ de $\mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ déterminée par

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

pour tout couple $(i, j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, q\}$, c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ip} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix}.$$

Si A et A' sont des éléments de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, puis B et B' sont des éléments de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, tandis que λ et μ sont des scalaires, alors

$$(A + A')B = AB + A'B, \tag{1}$$

$$A(B + B') = AB + AB', \tag{2}$$

$$(\lambda A)(\mu B) = (\lambda\mu)(AB). \tag{3}$$

Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, alors

$$(AB)C = A(BC). \tag{4}$$

En particulier, pour $n = p$, la multiplication des matrices ainsi définie est une loi de composition interne **bilinéaire** et **associative**. Du reste, la matrice $I_n = (\delta_{ij})$, où $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$, c'est-à-dire

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

est **élément neutre** pour cette multiplication sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$; elle est appelée **matrice unité** d'ordre n.

✍

Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n, muni de la multiplication des matrices, est une **$\mathbb{K}$-algèbre associative unitaire**.

La **transposée** d'une matrice $A = (a_{ij})$ de type (n,p) est la matrice (b_{ij}) de type (p,n), symbolisée par $A^\top$ et donnée par $b_{ij} = a_{ji}$ pour tout couple $(i,j) \in \{1,\ldots,p\} \times \{1,\ldots,n\}$.

Soient A et B des matrices de type (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors,

$$(A+B)^\top = (a_{ji} + bji) = A^\top + B^\top$$

et

$$(\lambda A)^\top = (\lambda a_{ji}) = \lambda A^\top.$$

En outre, tous les coefficients de la matrice transposée $A^\top$ sont nuls si, et seulement si, tous les coefficients de A sont nuls.

> ✍
>
> L'application de transposition, $A \mapsto A^\top$, est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Nous posons par ailleurs

$$AB = (c_{ij}), \qquad A^\top = (a'_{ij}), \qquad B^\top = (b'_{ij}).$$

Alors, pour tout couple $(i,j) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,q\}$, nous avons

$$c_{ji} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{p} b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^{p} b'_{ik} a'_{kj}.$$

Par conséquent,

$$(AB)^\top = B^\top A^\top. \tag{5}$$

Une matrice carrée A d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est dite **inversible** s'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$, où I_n désigne la matrice unité d'ordre n. La matrice B est alors appelée **inverse** de A et symbolisée par A^{-1}. Du reste,

$$I_n = I_n^\top = \left(AA^{-1}\right)^\top = \left(A^{-1}\right)^\top A^\top$$

et

$$I_n = I_n^\top = \left(A^{-1}A\right)^\top = A^\top \left(A^{-1}\right)^\top.$$

Donc, si une matrice carrée A est inversible, alors

$$\left(A^{-1}\right)^\top = \left(A^\top\right)^{-1}. \tag{6}$$

Dans la suite de cette note, nous allons considérer des ensembles de matrices carrées d'ordre n, puis déterminer s'ils sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Matrices symétriques

Une matrice carrée est dite **symétrique** si elle est égale à sa transposée. Autrement dit, une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est symétrique si $A = A^\top$, c'est-à-dire $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout couple (i, j) d'éléments de $[1, n] \cap \mathbb{N}$.

L'ensemble $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées symétriques d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. En effet, si A et B sont des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$(A + B)^\top = A^\top + B^\top = A + B \qquad \text{et} \qquad (\lambda A)^\top = \lambda A^\top = \lambda A.$$

Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, pour tout $(i, j) \in ([1, n] \cap \mathbb{N})^2$, la matrice $N_{i,j} = (\nu_{k\ell})$ est définie par

$$\nu_{k\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (k, \ell) = (i, j), \\ 0 & \text{si} \quad (k, \ell) \neq (i, j). \end{cases}$$

Autrement dit, tous les coefficients de la matrice $N_{i,j}$ sont nuls, à l'exception de celui d'indice (i, j) qui est égal à 1. De plus, nous considérons l'ensemble

$$J = \Big\{(i, j) \in ([1, n] \cap \mathbb{N})^2 \ \big| \ i > j\Big\}$$

et, pour tout couple $(k, \ell) \in J$, nous posons

$$S_{k,\ell} = N_{k,\ell} + N_{\ell,k}.$$

Dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$, nous avons par exemple

$$N_{2,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$N_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

puis

$$S_{3,1} = N_{3,1} + N_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Maintenant, soit $A = (a_{ij})$ une matrice symétrique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors,

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} N_{i,i} + \sum_{(i,j) \in J} a_{ij} S_{i,j}.$$

Les matrices $N_{i,i}$, où $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $S_{i,j}$, où $(i,j) \in J$, manifestement symétriques, forment de ce fait une famille génératrice du sous-espace $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$. Cette famille est libre et constituée de $n + \mathrm{card}(J)$ éléments. Cependant,

$$J = \Big\{(2,j) \mid j \in \mathbb{N}^* \wedge 2 > j\Big\} \cup \cdots \cup \Big\{(n,j) \mid j \in \mathbb{N}^* \wedge n > j\Big\}.$$

D'où

$$\mathrm{card}(J) = 1 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$$

et

$$n + \mathrm{card}(J) = n + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

> ✍
>
> L'ensemble $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Ce sous-espace vectoriel est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$. L'une de ses bases est la famille constituée des matrices $N_{i,i}$, où $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $S_{i,j}$, où $(i,j) \in J$.

2. Matrices antisymétriques

Une matrice carrée est dite **antisymétrique** si sa transposée est égale à son opposée. Autrement dit, une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est antisymétrique si $A^\top = -A$, c'est-à-dire $a_{ji} = -a_{ij}$ pour tout couple (i,j) d'éléments de $[1,n] \cap \mathbb{N}$.

L'ensemble $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées antisymétriques d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. En effet, si A et B sont des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$(A+B)^\top = A^\top + B^\top = -A - B = -(A+B)$$

et

$$(\lambda A)^\top = \lambda A^\top = \lambda(-A) = -(\lambda A).$$

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique 2. Alors, $2a = 0$ pour tout $a \in \mathbb{K}$. Ainsi, pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice $2A$ est nulle, et par conséquent $A = -A$.

> ✍
>
> Pour tout corps $\mathbb{K}$ de caractéristique 2, le sous-espace vectoriel $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques se confond donc avec celui $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques.

Dans la suite de cette section, nous supposons que $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique différent de 2, et considérons les matrices $N_{i,j}$ définies précédemment.

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$. Alors, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, nous avons $a_{ii} = -a_{ii}$, c'est-à-dire $2a_{ii} = 0$, et donc $a_{ii} = 0$. Du reste, pour tout couple (i, j) de l'ensemble

$$J = \Big\{(i, j) \in ([1, n] \cap \mathbb{N})^2 \;\big|\; i > j\Big\},$$

nous avons $a_{ji} = -a_{ij}$. Ceci entraîne

$$A = \sum_{(i,j)\in J} (a_{ij} N_{i,j} - a_{ij} N_{j,i}) = \sum_{(i,j)\in J} a_{ij} (N_{i,j} - N_{j,i}).$$

Les matrices $N_{i,j} - N_{j,i}$, où $(i, j) \in J$, forment de ce fait une famille génératrice de $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$. Cette famille est libre.

> ✍
>
> L'ensemble $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Ce sous-espace vectoriel est de dimension $\frac{(n-1)n}{2}$. L'une de ses bases est la famille constituée des matrices $N_{i,j} - N_{j,i}$, où $(i, j) \in J$.

3. Matrices à coefficients constants

Une matrice est dite **constante** si tous ses coefficients ont la même valeur.

Soit $\mathscr{C}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Un de ses éléments est la matrice nulle

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Soit $\mathbf{1}$ la matrice constante dont tous les coefficients valent 1 ; en d'autres termes,

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alors, pour tout $A \in \mathscr{C}_n(\mathbb{K})$, il existe un scalaire $a \in \mathbb{K}$ tel que $A = a \cdot \mathbf{1}$. Donc,

$$\mathscr{C}_n(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \cdot \mathbf{1}.$$

> ✍
>
> L'ensemble $\mathscr{C}_n(\mathbb{K})$ des matrices constantes est donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Ce sous-espace vectoriel est de dimension 1. Toute matrice constante de valeur non nulle (notamment la matrice $\mathbf{1}$) en constitue une base.

4. Matrices diagonales

Une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **diagonale** lorsque $a_{ij} = 0$ pour chaque couple (i, j) d'éléments de $[1, n] \cap \mathbb{N}$ vérifiant $i \neq j$.

Soit $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées diagonales d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Pour tout n-uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, un élément de $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ est défini par

$$\operatorname{diag}(x_1, \dots, x_n) = (a_{ij}),$$

avec $a_{ii} = x_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $a_{ij} = 0$ pour chaque couple $(i, j) \in ([1, n] \cap \mathbb{N})^2$ vérifiant $i \neq j$. En d'autres termes,

$$\operatorname{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x_n \end{bmatrix}.$$

Toute matrice diagonale à cette forme. En effet, si une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonale, alors

$$A = \operatorname{diag}(a_{ii}, \dots, a_{nn}).$$

En particulier, la matrice nulle $\mathbf{0}$ et la matrice unité I_n sont des matrices diagonales, car

$$\mathbf{0} = \operatorname{diag}(0, \dots, 0) \qquad \text{et} \qquad I_n = \operatorname{diag}(1, \dots, 1).$$

Dans $\mathbb{K}^n$, soient des n-uplets $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$, puis soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors,

$$\operatorname{diag}(x_1, \dots, x_n) + \operatorname{diag}(y_1, \dots, y_n) = \operatorname{diag}(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

et

$$\lambda \cdot \operatorname{diag}(x_1, \dots, x_n) = \operatorname{diag}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

Ceci induit que l'ensemble $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées diagonales est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Du reste, pour toute matrice $A = (a_{ij}) \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$, nous avons

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} N_{i,i}.$$

Ceci montre que les matrices $N_{i,i}$, où $i \in \{1, \dots, n\}$, définies dans la section 1 à la page 4, forment une famille génératrice de $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$. Cette famille est notoirement libre.

✍

L'ensemble $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ des matrices diagonales est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Ce sous-espace vectoriel est de dimension n. L'une de ses bases est la famille constituée des matrices $N_{i,i}$, où $i \in \{1, \dots, n\}$.

Notons au passage que le produit de deux matrices diagonales est également diagonale. En effet, quels que soient les n-uplets $(x_1,\dots,x_n)$ et $(y_1,\dots,y_n)$ de $\mathbb{K}^n$, et les matrices $A=(a_{ij})\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, nous avons

$$\operatorname{diag}(x_1,\dots,x_n)\cdot\operatorname{diag}(y_1,\dots,y_n)=\operatorname{diag}(x_1y_1,\dots,x_ny_n),$$

puis

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & x_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & x_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1a_{11} & x_1a_{12} & \cdots & x_1a_{1n}\\ x_2a_{21} & x_2a_{22} & \cdots & x_2a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_na_{n1} & x_na_{n2} & \cdots & x_na_{nn}\end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ddots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & x_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_1 & \cdots & a_{1n}x_1\\ a_{21}x_2 & a_{22}x_2 & \cdots & a_{2n}x_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}x_n & a_{n2}x_n & \cdots & a_{nn}x_n\end{bmatrix}.$$

✍

L'ensemble $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ des matrices diagonales est donc une sous-algèbre de la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Une matrice diagonale $\operatorname{diag}(x_1,x_2,\dots,x_n)$ est inversible si, et seulement si, chacun des coefficients x_i, où $i\in\{1,\dots,n\}$, est non nuls. Le cas échéant, son inverse est

$$\operatorname{diag}\left(1/x_1,1/x_2,\dots,1/x_n\right).$$

5. Matrices inversibles

En prélude, nous avons défini la notion d'inversibilité pour les matrices carrées. Il est clair que la matrice nulle n'est pas inversible. Puisque tout sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ contient la matrice nulle, il en résulte que l'ensemble des matrices inversibles d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

6. Matrices non-inversibles

Pour $x_1=\cdots=x_{n-1}=1$ et $x_n=0$, puis $y_1=\cdots=y_{n-1}=0$ et $y_n=1$, les matrices

$$\operatorname{diag}(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)\qquad\text{et}\qquad\operatorname{diag}(y_1,\dots,y_{n-1},y_n)$$

sont *non-inversibles*. Toutefois, leur somme est inversible ; en effet,

$$\begin{aligned}\operatorname{diag}(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)+\operatorname{diag}(y_1,\dots,y_{n-1},y_n)&=\operatorname{diag}(x_1+y_1,\dots,x_{n-1}+y_{n-1},x_n+y_n)\\&=\operatorname{diag}(1,\dots,1,1)=I_n\end{aligned}$$

L'ensemble des matrices non-inversibles d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ n'est donc pas stable pour l'addition. De ce fait, il n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

7. Matrices triangulaires supérieures

Une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **triangulaire supérieure** si $a_{ij} = 0$ pour tout couple (i, j) d'éléments de $[1, n] \cap \mathbb{N}$ vérifiant $i > j$, c'est-à-dire

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Soit $\mathfrak{T}_n^+(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées triangulaires supérieures d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Nous considérons des éléments $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ de $\mathfrak{T}_n^+(\mathbb{K})$, un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, puis l'ensemble J des couples (i, j) d'éléments de $[1, n] \cap \mathbb{N}$ tels que $i > j$, ainsi que l'ensemble L des couples (i, j) d'éléments de $[1, n] \cap \mathbb{N}$ tels que $i \leq j$. Alors,

$$a_{ij} + b_{ij} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda a_{ij} = 0$$

pour tout $(i, j) \in J$. Il en résulte que les matrices

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \qquad \text{et} \qquad \lambda A = (\lambda a_{ij})$$

sont triangulaires supérieures. Par ailleurs,

$$A = \sum_{(i,j) \in L} a_{ij} N_{i,j}.$$

Par conséquent, les matrices $N_{i,j}$, où $(i, j) \in L$, définies dans la section 1 à la page 4, forment une famille génératrice de $\mathfrak{T}_n^+(\mathbb{K})$. Cette famille est manifestement libre. Cependant,

$$L = \Big\{(i, 1) \ \big| \ i \in \mathbb{N}^* \wedge i \leq 1\Big\} \cup \cdots \cup \Big\{(i, n) \ \big| \ i \in \mathbb{N}^* \wedge i \leq n\Big\}.$$

D'où

$$\operatorname{card}(L) = 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

✍

L'ensemble $\mathfrak{T}_n^+(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Ce sous-espace vectoriel est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$. L'une de ses bases est la famille constituée des matrices $N_{i,j}$, où $(i, j) \in L$.

8. Matrices qui commutent avec une matrice donnée

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbf{Com}(A)$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec A. Alors, d'après les relations de bilinéarité décrites à la page 2, pour tout couple (B, B') d'éléments de $\mathbf{Com}(A)$ et chaque $\lambda \in \mathbb{K}$, nous avons

$$(B + B')A = BA + B'A = AB + AB' = A(B + B')$$

et

$$(\lambda B)A = \lambda(BA) = \lambda(AB) = A(\lambda B),$$

Ceci signifie que les matrices $B + B'$ et λB appartiennent à $\mathbf{Com}(A)$. L'ensemble $\mathbf{Com}(A)$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Mieux, il est une sous-algèbre de la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. En effet, si B et C sont des éléments de $\mathbf{Com}(A)$, alors

$$(BC)A = B(CA) = B(AC) = (BA)C = (AB)C = A(BC),$$

et donc $BC \in \mathbf{Com}(A)$.

La détermination de la dimension et d'une base de $\mathbf{Com}(A)$ est l'objet d'un texte différent.

9. Matrices idempotentes

Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **idempotente** si $A^2 = A$.

Soit $\mathfrak{I}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées idempotentes d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Il est clair que la matrice unité I_n appartient à $\mathfrak{I}_n(\mathbb{K})$.

Tout d'abord, nous supposons que le corps $\mathbb{K}$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Alors, il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda^2 \neq \lambda$. Ainsi,

$$(\lambda I_n)^2 = \lambda^2 I_n^2 = \lambda^2 I_n \neq \lambda I_n.$$

Maintenant, soit le corps $\mathbb{K}$ isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Alors, des calculs simples permettent de montrer que les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

sont idempotentes. Toutefois, leur somme

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

n'est pas idempotente. En effet, $1 + 1 = 0$, et donc $(A + B)^2 = \mathbf{0}$.

En tout état de cause, l'ensemble des matrices carrées idempotentes d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ n'est pas un sous-espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

10. Matrices de trace nulle

Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, soient A et B des matrices de trace nulle. En outre, soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors,

$$\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B) = 0 + 0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \cdot \operatorname{tr}(A) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

De ce fait, $A + B$ et λA sont des matrices de trace nulle. Il en résulte que l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de trace nulle, est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle. Alors,

$$a_{nn} = -\sum_{i=1}^{n-1} a_{ii},$$

et donc

$$\begin{aligned} A &= \sum_{(i,j)\in X} a_{ij} N_{i,j} + \operatorname{diag}\left(a_{11}, \ldots, a_{n-1,n-1}, -\sum_{i=1}^{n-1} a_{ii}\right) \\ &= \sum_{(i,j)\in X} a_{ij} N_{i,j} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{ii}(N_{i,i} - N_{n,n}), \end{aligned}$$

où les $N_{i,j}$ sont des matrices définies dans la section 1 à la page 4 et

$$X = \Big\{(i,j) \in ([1,n] \cap \mathbb{N})^2 \ \Big| \ i \neq j\Big\}.$$

Il en découle que les matrices $N_{i,j}$, où $(i,j) \in X$, et $N_{i,i} - N_{n,n}$, où $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, forment une famille génératrice de l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de trace nulle. Cette famille est libre, et le nombre de ses éléments est

$$n^2 - n + n - 1 = n^2 - 1.$$

> ✍
>
> L'ensemble des matrices carrées d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de trace nulle, est un sous-espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Ce sous-espace vectoriel est de dimension $n^2 - 1$. L'une de ses bases est la famille constituée des matrices $N_{i,j}$, où $(i,j) \in X$, et $N_{i,i} - N_{n,n}$, où $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.