Sous-anneaux et idéaux de l'anneau $\mathbb{Z}^2$

Christian V. Nguembou Tagne

9 juin 2021

Dans cette note, nous étudions l'anneau $\mathbb{Z}^2$, produit de l'anneau $\mathbb{Z}$ par lui-même. Précisément, nous allons déterminer tous ses sous-anneaux et tous ses idéaux.

Aux fins de comparaison, nous rappelons d'entrée de jeu que l'anneau $\mathbb{Z}$ a un seul sous-anneau (lui-même) et que chacun de ses idéaux à la forme $a\mathbb{Z}$, où $a \in \mathbb{N}$.

1. Une famille de sous-anneaux

✍

Soit d un entier naturel. Alors, l'ensemble

$$A_d = \Big\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \;\Big|\; x \equiv y \,[\mathrm{mod}\, d]\Big\}$$

est un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$.

Soient (x, y) et (x', y') des éléments de A_d. Alors, il existe un couple (k, k') d'entiers relatifs tels que $x = dk + y$ et $x' = dk' + y'$. De ce fait, $x - x' = d(k - k') + y - y'$ et

$$xx' = (dk + y)(dk' + y') = d(dkk' + ky' + yk') + yy'.$$

Il en résulte que $x - x' \equiv y - y' \,[\mathrm{mod}\, d]$ et $xx' \equiv yy' \,[\mathrm{mod}\, d]$. D'où

$$(x, y) - (x', y') = (x - x', y - y') \in A_d \qquad \text{et} \qquad (x, y) \cdot (x', y') = (xx', yy') \in A_d.$$

Du reste, $(1, 1) \in A_d$, car $1 = d \cdot 0 + 1$. Par conséquent, A_d est un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$.

2. Inventaire de tous les sous-anneaux

✍

Soit B un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$. Alors, il existe un entier naturel d tel que $B = A_d$.

Nous considérons tout d'abord l'ensemble

$$H = \Big\{x \in \mathbb{Z} \mid (x, 0) \in B\Big\}.$$

Alors, $0 \in H$, car $(0, 0) \in B$. De plus, si x et x' sont des éléments de H, alors $(x, 0) \in B$ et $(-x', 0) = -(x', 0) \in B$; ceci entraîne $(x - x', 0) = (x, 0) + (-x', 0) \in B$, et donc $x - x' \in H$. De ce fait, H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. Il existe par conséquent un entier naturel d tel que $H = d\mathbb{Z}$.

À présent, nous allons montrer que $B = A_d$.

À cet effet, soit $(x, y) \in B$. Alors, $y \cdot (1, 1) \in B$, car $(1, 1) \in B$. Puisque

$$(x - y, 0) = (x, y) - (y, y) = (x, y) - y \cdot (1, 1),$$

il en découle que $(x - y, 0) \in B$, et donc $x - y \in H = d\mathbb{Z}$. De ce fait, il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = dk$, c'est-à-dire $x \equiv y \,[\mathrm{mod}\, d]$. D'où $(x, y) \in A_d$. Ainsi, $B \subset A_d$.

Pour établir l'inclusion réciproque, nous considérons un couple $(x, y) \in A_d$. Alors, il existe un entier relatif k tel que $x = dk + y$. Cependant, $(dk, 0) \in B$, car $dk \in d\mathbb{Z} = H$. En outre, $(y, y) \in B$, puisque $(1, 1) \in B$ et $(y, y) = y \cdot (1, 1)$. Ceci induit

$$(x, y) = (dk + y, y) = (dk, 0) + (y, y) \in B.$$

Par conséquent, $A_d \subset B$.

3. Forme des idéaux

✍

Soit I un idéal de $\mathbb{Z}^2$, puis

$$I_1 = \Big\{x \in \mathbb{Z} \mid (x, 0) \in I\Big\} \qquad \text{et} \qquad I_2 = \Big\{y \in \mathbb{Z} \mid (0, y) \in I\Big\}.$$

Alors, I_1 et I_2 sont des idéaux de $\mathbb{Z}$, puis $I = I_1 \times I_2$.

Nous avons $(0, 0) \in I$, car I est un sous-groupe du groupe additif de l'anneau $\mathbb{Z}^2$. De ce fait, $0 \in I_1$. De plus, si x et x' sont des éléments de I_1, alors $(x, 0) \in I$ et $(x', 0) \in I$, puis

$$(x - x', 0) = (x, 0) - (x', 0) \in I.$$

D'où $x - x' \in I_1$. Ainsi, I_1 est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. De plus, si $x \in I_1$ et $z \in \mathbb{Z}$, alors

$$(xz, 0) = (x, 0) \cdot (z, 0) \in I \cdot \mathbb{Z}^2 \subset I.$$

Donc, $xz \in I_1$. Ceci signifie que $I_1 \cdot \mathbb{Z} \subset I_1$. Par conséquent, I_1 est un idéal de l'anneau $\mathbb{Z}$. De manière analogue, on montre que I_2 est un idéal de l'anneau $\mathbb{Z}$.

Pour conclure la démonstration, nous allons établir que $I = I_1 \times I_2$.

Tout d'abord, soit $(x, y) \in I$. Alors,

$$(x, 0) = (x, y) \cdot (1, 0) \in I \cdot \mathbb{Z}^2 \subset I.$$

D'où $x \in I_1$. Du reste,

$$(0, y) = (x, y) \cdot (0, 1) \in I \cdot \mathbb{Z}^2 \subset I.$$

Ainsi, $y \in I_2$. De ce fait, $(x, y) \in I_1 \times I_2$. Par conséquent, $I \subset I_1 \times I_2$.

Maintenant, soit $(x, y) \in I_1 \times I_2$. Alors, $x \in I_1$ et $y \in I_2$, c'est-à-dire $(x, 0) \in I$ et $(0, y) \in I$. D'où $(x, y) = (x, 0) + (0, y) \in I + I \subset I$. Il en résulte que $I_1 \times I_2 \subset I$.

4. Sur le caractère principal de l'anneau

> ✍
>
> Tout idéal de l'anneau $\mathbb{Z}^2$ est *principal*. Autrement dit, pour tout idéal I de $\mathbb{Z}^2$, il existe un couple $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $I = (a, b) \cdot \mathbb{Z}^2$.

Soit I un idéal de $\mathbb{Z}^2$. Alors, selon le résultat prouvé dans la section 3 précédente, il existe des idéaux I_1 et I_2 de $\mathbb{Z}$ tels que $I = I_1 \times I_2$. Au demeurant, il existe des entiers naturels a et b tels que $I_1 = a\mathbb{Z}$ et $I_2 = b\mathbb{Z}$. De ce fait,

$$I = a\mathbb{Z} \times b\mathbb{Z} = \Big\{\ (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \ \big|\ (\exists (k, \ell) \in \mathbb{Z}^2)\ x = ak \ \wedge\ y = b\ell \Big\} = (a, b) \cdot \mathbb{Z}^2.$$