Idéaux triviaux et corps commutatif

Christian V. Nguembou Tagne

9 juin 2021

Dans cette note, nous allons démontrer que tout *anneau commutatif non nul*, dont les seuls idéaux sont triviaux, est un *corps*. Dans notre démonstration, nous mettons à contribution le résultat suivant :

Proposition 1.

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau commutatif. Alors, pour tout élément $x \in A$, l'ensemble

$$xA = \Big\{ xa \ \Big| \ a \in A \Big\} = \Big\{ y \in A \ \Big| \ (\exists a \in A) \ y = xa \Big\}$$

est un idéal de l'anneau $(A, +, \cdot)$.

Démonstration :

Soient a et a' des éléments de A. En vertu de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, nous avons alors

$$(xa) + (xa') = x(a + a') \in xA.$$

De plus,

$$-(xa) = x \cdot (-a) \in xA \qquad \text{et} \qquad 0 = x \cdot 0 \in xA.$$

Il en résulte que xA est un sous-groupe de $(A, +)$ Au demeurant,

$$a'(xa) = (xa)a' = x(aa') \in xA.$$

Par conséquent, xA est un idéal de l'anneau $(A, +, \cdot)$. $\square$

Soit $(A, +, \cdot)$ un *anneau commutatif non nul* dont les seuls idéaux sont $\{0\}$ et A. Pour montrer que $(A, +, \cdot)$ est un *corps*, il suffit d'établir que tout élément x de A, distinct de 0, est inversible pour la multiplication. En effet, $x = x \cdot 1 \in xA$. Eu égard à la proposition 1, il en résulte que xA est un idéal de $(A, +, \cdot)$ contenant un élément non nul. De ce fait, $xA = A$. D'où $1 \in xA$. Ceci signifie qu'il existe un élément $x' \in A$ tel que $1 = xx'$. La multiplication sur A étant commutative, nous avons par ailleurs $xx' = x'x$. L'élément x' est donc l'inverse de x pour la multiplication. Par conséquent, chaque élément x de A, distinct de 0, est inversible pour la multiplication.