Exercice d'algèbre linéaire

Application linéaire associée, étude de l'inversibilité et décomposition de Gauss-Jordan d'une matrice

Dans l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre $(3,4)$ à coefficients dans $\mathbb{R}$, soient

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 1 & a & 2a & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & -a \end{bmatrix},$$

où a est un réel.

(1) Définissez l'application linéaire L_H canoniquement associée à H, en donnant notamment son l'expression analytique. Justifiez ensuite brièvement que H est inversible à droite si, et seulement si, L_H est une surjection.

(2) Indiquez dans l'ordre les opérations élémentaires sur les lignes qui transforment H en H'.

Rappel : Pour toutes les inconnues matricielles $X \in \mathscr{M}_{4,n}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathscr{M}_{3,n}(\mathbb{R})$, les systèmes d'équations « $HX = Y$ » et « $H'X = Y'$ » sont équivalents, où Y' est obtenu de Y en appliquant à Y, dans l'ordre, les mêmes opérations ayant été menées pour transformer H en H'.

(3) Déduisez-en a pour que H soit inversible à droite, et montrez dans ce cas que H possède une infinité d'inverses à droite.

(4) Justifiez que H n'est pas inversible à gauche.

(5) Soit $a = 0$. Déterminez deux matrices inversibles P et Q telles que

$$Q^{-1}HP = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_{1,2} & \mathbf{0}_{1,2} \end{bmatrix}$$

en suivant les trois étapes ci-dessous :

- **(a)** Déterminez une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ contenant une base de $\ker L_H$ que vous aurez préalablement déterminée.
- **(b)** Déduisez ensuite de $\mathcal{B}$ une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ contenant de $\operatorname{im} L_H$.
- **(c)** Déduisez enfin avec justification une construction des matrices P et Q.