Deux parties denses de la droite réelle

Christian V. Nguembou Tagne

10 juin 2021

Dans cette note, nous allons, au moyen de la propriété d'Archimède, démontrer que l'ensemble des multiples d'inverses de puissances de 2 d'une part, et l'ensemble des nombres décimaux d'autre part, sont denses dans $\mathbb{R}$.

✍ **Lemme 1 (Propriété d'Archimède).**

Soient a et b des nombres réels tels que $a > 0$ et $b \geq 0$. Alors, il existe un nombre entier naturel n tel que $na \geq b$.

Dans l'argumentaire, nous allons également mettre à contribution le lemme 2 suivant :

✍ **Lemme 2.**

Pour tout entier naturel n, nous avons $2^n > n$.

Pour $n = 0$ ou $n = 1$, l'inégalité $2^n > n$ est triviale. Pour $n \geq 2$, il suffit d'utiliser la *formule du binôme* de Newton ; celle-ci livre

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \geq \binom{n}{1} + \binom{n}{0} = n + 1 > n.$$

1. Une partie dense de la droite réelle

Soit A la partie $\mathbb{Q}$ définie par

$$A = \left\{ \frac{m}{2^n} \ : \ m \in \mathbb{Z} \ \text{ et } \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Nous considérons par ailleurs deux réels x et y tels que $x < y$. Alors, $y - x > 0$ et, d'après la propriété d'Archimède, il existe un entier naturel n tel que $n(y - x) \geq 2 > 1$. Puisque $2^n > n$ (voir le lemme 2), il en résulte que $2^n(y - x) > 1$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{2^n} < y - x. \tag{$\star$}$$

Maintenant, nous posons $m = \mathbb{E}(2^n x)$, où $\mathbb{E}$ désigne la *fonction partie entière*. Alors, par définition, $m \in \mathbb{Z}$ et $m \leq 2^n x < m+1$. D'où

$$x < \frac{m+1}{2^n} \qquad \text{et} \qquad \frac{m}{2^n} \leq x.$$

Compte tenu de l'inégalité ($\star$), ceci entraîne

$$\frac{m+1}{2^n} = \frac{m}{2^n} + \frac{1}{2^n} \leq x + \frac{1}{2^n} < x + y - x = y.$$

Tout compte fait, nous avons $x < \frac{m+1}{2^n} < y$. Par conséquent, pour tout intervalle ouvert et non vide I de $\mathbb{R}$, il existe un élément a de A tel que $a \in I$. Ceci signifie que l'ensemble A est dense dans $\mathbb{R}$.

2. Densité des nombres décimaux dans la droite réelle

Nous rappelons que tout nombre décimal est le rapport d'un entier relatif par une puissance de 10. En d'autres termes, l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est donné par

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{m}{10^n} \ : \ m \in \mathbb{Z} \ \text{ et } \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est dense dans $\mathbb{R}$. Pour s'en convaincre, il suffit de noter que $10^n > 2^n > n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis de mener une argumentation similaire à celle de la section précédente.