Polynôme caractéristique et déterminant d'une matrice carrée

Christian V. Nguembou Tagne

24 juin 2021

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique différente de 2, et $A = (a_{ij})_{i,j}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ pour un entier naturel $n \geq 2$.

Dans cet article, nous nous intéressons principalement aux coefficients du **polynôme caractéristique** de A, définie par

$$P_A(t) = \det(t\mathbf{1}_n - A).$$

1. Cas des matrices carrées d'ordre 2

Dans cette section, nous posons $n = 2$ et considérons la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

1.1. Polynôme caractéristique en fonction de la trace et du déterminant

Le polynôme caractéristique de la matrice A est donné par

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} t-a & -b \\ -c & t-d \end{vmatrix} = (t-a)(t-d) - bc = t^2 - (a+d)t + ad - bc.$$

Par ailleurs, la trace de la matrice A est $\mathrm{tr}(A) = a + d$, tandis que son déterminant est

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

✍

Par conséquent, le polynôme caractéristique de la matrice A est

$$P_A(t) = t^2 - \mathrm{tr}(A)t + \det(A).$$

Nous avons en outre

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix}.$$

Ceci entraîne

$$A^2 - \operatorname{tr}(A)A = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (a+d)a & (a+d)b \\ (a+d)c & (a+d)d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bc - ad & 0 \\ 0 & bc - ad \end{bmatrix},$$

et par suite

$$A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)\mathbf{1}_2 = \begin{bmatrix} bc - ad & 0 \\ 0 & bc - ad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

✍

Nous avons donc effectivement

$$P_A(A) = A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)\mathbf{1}_2 = \mathbf{0}_2. \qquad (\star)$$

1.2. Déterminant de la matrice en fonction d'un polynôme

La trace de la matrice A^2 est donnée par

$$\operatorname{tr}(A^2) = a^2 + bc + bc + d^2 = a^2 + 2bc + d^2.$$

De ce fait,

$$\operatorname{tr}(A)^2 - \operatorname{tr}(A^2) = (a+d)^2 - a^2 - 2bc - d^2 = 2(ad - bc) = 2\det(A).$$

✍

En considérant le polynôme à deux variables $h_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\Big(x_1^2 - x_2\Big)$ de $\mathbb{Q}[x_1, x_2]$, il en résulte que

$$\det(A) = h_2\Big(\operatorname{tr}(A), \operatorname{tr}(A^2)\Big).$$

1.3. Expression de l'inverse de la matrice

D'après l'équation $(\star)$, nous avons

$$\det(A)\mathbf{1}_2 = \operatorname{tr}(A)A - A^2 = A\Big(\operatorname{tr}(A)\mathbf{1}_2 - A\Big) = \Big(\operatorname{tr}(A)\mathbf{1}_2 - A\Big)A.$$

Donc, si $\det(A) \neq 0$, alors la matrice A est inversible, et son inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\Big(\mathrm{tr}(A)\mathbf{1}_2 - A\Big) = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} \mathrm{tr}(A) - a & -b \\ -c & \mathrm{tr}(A) - d \end{bmatrix}.$$

Par conséquent, si le déterminant d'une matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ est non nul, alors elle est inversible et son inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

2. Cas des matrices carrées d'ordre quelconque

Dans cette section, nous admettons sans démonstration que

$$P_A(t) = t^n + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k h_k\Big(\mathrm{tr}(A), \ldots, \mathrm{tr}(A^k)\Big)t^{n-k} \qquad (\star\star)$$

pour des polynômes appropriés $h_k = h_k(x_1, \ldots, x_k)$ de k variables, à coefficients dans $\mathbb{K}$. Nous admettons également le **théorème de Cayley-Hamilton** qui affirme que toute matrice carrée annule son polynôme caractéristique, c'est-à-dire

$$P_A(A) = \mathbf{0}_n.$$

2.1. Expression du coefficient d'ordre n-1 du polynôme caractéristique et du déterminant de la matrice

Soit $A = (a_{ij})$. D'après la **formule de Leibniz**, nous avons

$$P_A(t) = \det(t\mathbf{1}_n - A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n}(t\delta_{\sigma(i),i} - a_{\sigma(i),i}),$$

où δ_{ij} désigne le **symbole de Kronecker**, $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ et $\varepsilon(\sigma)$ la signature de la permutation σ. Cependant, si une permutation σ est distincte de l'application identique, alors il existe un $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\sigma(i) \neq i$, et donc $\delta_{\sigma(i),i} = 0$. Ainsi,

$$\prod_{i=1}^{n}(t\delta_{\sigma(i),i} - a_{\sigma(i),i})$$

est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 2$ pour $\sigma \neq \mathrm{id}$. Par conséquent,

$$P_A(t) = (t - a_{11}) \cdots (t - a_{nn}) + q(t),$$

où $q(t)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-2$. Il en résulte que, dans $P_A(t)$, le coefficient de t^{n-1} est

$$-(a_{11}+\cdots+a_{nn}) = -\mathrm{tr}(A).$$

> ✍
>
> Le polynôme h_1 de $\mathbb{K}[x_1]$ est donc $h_1(x_1) = x_1$.

Par définition, la valeur du polynôme caractéristique d'une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ en 0 est

$$P_A(0) = \det(-A) = \det(-\mathbf{1}_n A) = \det(-\mathbf{1}_n) \times \det(A) = (-1)^n \det(A).$$

Toutefois, en remplaçant t par 0 dans l'égalité $(\star\star)$, nous obtenons

$$P_A(0) = (-1)^n h_n\Big(\mathrm{tr}(A), \ldots, \mathrm{tr}(A^n)\Big).$$

Ceci entraîne

$$(-1)^n \det(A) = (-1)^n h_n\Big(\mathrm{tr}(A), \ldots, \mathrm{tr}(A^n)\Big).$$

> ✍
>
> Par conséquent, $\det(A) = h_n\Big(\mathrm{tr}(A), \ldots, \mathrm{tr}(A^n)\Big)$.

2.2. Application aux matrices carrées d'ordre 3

Dans l'espace $\mathrm{M}_3(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre 3, nous considérons

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est donné par

$$P_A(t) = \det(t\mathbf{1}_3 - A) = \begin{vmatrix} t-a & -b & -c \\ -d & t-e & -f \\ -g & -h & t-i \end{vmatrix}.$$

En développant ce déterminant suivant la première ligne, nous obtenons

$$\begin{aligned} P_A(t) &= (t-a) \times \begin{vmatrix} t-e & -f \\ -h & t-i \end{vmatrix} + b \times \begin{vmatrix} -d & -f \\ -g & t-i \end{vmatrix} - c \times \begin{vmatrix} -d & t-e \\ -g & -h \end{vmatrix} \\ &= (t-a)\big[(t-e)(t-i) - fh\big] + b\big[-d(t-i) - fg\big] - c\big[dh + g(t-e)\big]. \end{aligned}$$

✍

Il en résulte que

$$P_A(t) = t^3 - (a+e+i)t^2 + (ae+ai+ei-bd-cg-fh)t - (aei+bfg+cdh-afh-bdi-ceg). \quad (\spadesuit)$$

Par ailleurs,

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bd+cg & ab+be+ch & ac+bf+ci \\ ad+de+fg & bd+e^2+fh & cd+ef+fi \\ ag+dh+gi & bg+eh+hi & cg+fh+i^2 \end{bmatrix}.$$

Au demeurant,

$$A^3 = \begin{bmatrix} a^2+bd+cg & ab+be+ch & ac+bf+ci \\ ad+de+fg & bd+e^2+fh & cd+ef+fi \\ ag+dh+gi & bg+eh+hi & cg+fh+i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Ainsi, en posant $A^3 = (c_{ij})$, nous obtenons

$$\begin{aligned} c_{11} &= a(a^2+bd+cg) + d(ab+be+ch) + g(ac+bf+ci) \\ &= a^3+abd+acg+abd+bde+cdh+acg+bfg+cgi \\ &= a^3+2abd+2acg+bde+bfg+cdh+cgi \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} c_{22} &= b(ad+de+fg) + e(bd+e^2+fh) + h(cd+ef+fi) \\ &= abd+bde+bfg+bde+e^3+efh+cdh+efh+fhi \\ &= e^3+abd+2bde+bfg+cdh+2efh+fhi, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} c_{33} &= c(ag+dh+gi) + f(bg+eh+hi) + i(cg+fh+i^2) \\ &= acg+cdh+cgi+bfg+efh+fhi+cgi+fhi+i^3 \\ &= i^3+acg+bfg+cdh+2cgi+efh+2fhi. \end{aligned}$$

✍

Des calculs simples, mais fastidieux, permettent de vérifier que

$$P_A(A) = \mathbf{0}_3.$$

Ces calculs sont laissés à la charge des lecteurs téméraires.

À présent, notons que les traces des matrices A, A^2 et A^3 sont respectivement

$$\operatorname{tr}(A) = a + e + i$$

et

$$\operatorname{tr}\left(A^2\right) = a^2 + e^2 + i^2 + 2bd + 2cg + 2fh,$$

puis

$$\operatorname{tr}\left(A^3\right) = c_{11} + c_{22} + c_{33},$$

et donc

$$\operatorname{tr}\left(A^3\right) = a^3 + e^3 + i^3 + 3abd + 3acg + 3bde + 3bfg + 3cdh + 3cgi + 3efh + 3fhi.$$

Cependant,

$$\left[\operatorname{tr}(A)\right]^2 = \left(a + e + i\right)^2 = a^2 + e^2 + i^2 + 2ae + 2ai + 2ei$$

et

$$\left[\operatorname{tr}(A)\right]^3 = \left(a + e + i\right)^3 = a^3 + e^3 + i^3 + 3a^2e + 3a^2i + 3ae^2 + 3e^2i + 3ai^2 + 3ei^2 + 6aei.$$

Ceci entraîne

$$\left[\operatorname{tr}(A)\right]^2 - \operatorname{tr}\left(A^2\right) = 2(ae + ai + ei - bd - cg - fh)$$

et

$$\left[\operatorname{tr}(A)\right]^3 - 3\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}\left(A^2\right) + 2\operatorname{tr}\left(A^3\right) = 6(aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg),$$

c'est-à-dire

$$ae + ai + ei - bd - cg - fh = \frac{1}{2}\left[\operatorname{tr}(A)\right]^2 - \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(A^2\right)$$

et

$$aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg = \frac{1}{6}\left[\operatorname{tr}(A)\right]^3 - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}\left(A^2\right) + \frac{1}{3}\operatorname{tr}\left(A^3\right).$$

✍

Somme toute, compte tenu de l'égalité (♠) à la page 5, nous avons

$$P_A(t) = t^3 + (-1)^1 h_1\left(\operatorname{tr}(A)\right)t^2 + (-1)^2 h_2\left(\operatorname{tr}(A), \operatorname{tr}(A^2)\right)t + (-1)^3 h_3\left(\operatorname{tr}(A), \operatorname{tr}(A^2), \operatorname{tr}(A^3)\right),$$

où les polynômes $h_1 \in \mathbb{K}[x_1]$, puis $h_2 \in \mathbb{K}[x_1, x_2]$ et $h_3 \in \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]$ sont donnés par

$$h_1(x_1) = x_1 \qquad \text{et} \qquad h_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2,$$

puis

$$h_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{6}x_1^3 - \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{3}x_3.$$