Anneau des applications d'un ensemble non vide dans $\mathbb{R}$

Christian V. Nguembou Tagne

25 juin 2021

Soit E un ensemble non-vide et $\mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de E dans $\mathbb{R}$. Pour tout couple (f,g) d'éléments de $\mathscr{F}(E,\mathbb{R})$, des éléments $f+g$ et $f\times g = fg$ de $\mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ sont données par

$$f+g : E \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)+g(x),$$

et

$$f\times g : E \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)\times g(x).$$

Des opérations, appelées respectivement **addition** et **multiplication**, sont ainsi définies sur $\mathscr{F}(E,\mathbb{R})$.

L'ensemble $\mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ muni de cette addition est un *groupe abélien*. Ce résultat se démontre sans difficulté, compte tenu du fait que $(\mathbb{R},+)$ est un groupe abélien. L'élément neutre du groupe $\Big(\mathscr{F}(E,\mathbb{R}),+\Big)$ est l'application nulle

$$\mathbf{0} : E \to \mathbb{R},\ x \mapsto 0.$$

Le symétrique d'un élément f de $\mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ pour l'addition est l'*application opposée*

$$-f : E \to \mathbb{R},\ x \mapsto -f(x).$$

Des calculs simples permettent de montrer que la multiplication sur $\mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ est *associative*, *commutative* et *distributive* par rapport à l'addition. Elle possède de plus un *élément neutre* ; notamment, l'application unité

$$\mathbf{1} : E \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1.$$

Tout compte fait, $\Big(\mathscr{F}(E,\mathbb{R}),+,\times\Big)$ est un *anneau unitaire commutatif.*

1. Anneau des fonctions continues sur un intervalle

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$. Le cours d'analyse nous enseigne que la somme et le produit de deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ sont également continues. En outre, l'application unité

$$\mathbf{1} : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1,$$

comme chaque fonction constante, appartient à $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$. Il en résulte que $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ est un sous-anneau de l'anneau unitaire commutatif $\big(\mathscr{F}(I,\mathbb{R}),+,\times\big)$. Par conséquent, le triplet

$$\big(\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}),+,\times\big)$$

est lui-même un anneau unitaire commutatif.

2. Anneau des suites réelles convergentes de limite nulle

Soit E l'ensemble des suites réelles convergentes. Alors, E est une partie de $\mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$, car toute suite réelle est fondamentalement une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Du reste, nous savons que la somme et le produit de deux suites réelles convergentes convergent aussi. Par ailleurs, la suite constante de valeur 1 est manifestement convergente. De ce fait, E est un sous-anneau de l'anneau unitaire commutatif $\big(\mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}),+,\times\big)$. Le triplet $(E,+,\times)$ est donc un anneau unitaire commutatif.

Soit E_0 l'ensemble des suites réelles convergentes de limite nulle. Alors, E_0 est une partie de E. D'où $E_0 \subset \mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$. Si $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des éléments de E_0, alors

$$\lim(u+v) = \lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n) = \left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) + \left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) = 0+0=0$$

et

$$\lim(u\times v) = \lim_{n\to+\infty}(u_n\times v_n) = \left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) \times \left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) = 0\times 0=0.$$

De ce fait, E_0 est un sous-anneau de l'anneau commutatif $\big(\mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}),+,\times\big)$. Par conséquent, $(E_0,+,\times)$ est un anneau commutatif.