Toutes les topologies d'un ensemble de deux ou trois éléments

Christian V. Nguembou Tagne

10 juin 2021

Dans cette contribution, nous présentons une écriture en extension de l'ensemble des topologies des ensembles ayant deux ou trois éléments.

Prélude

Pour soutenir notre énumération, nous proposons une caractérisation des topologies sur les ensembles finis.

Proposition 1.

Soit X un ensemble fini. Une partie $\mathfrak{O}$ de $\mathscr{P}(X)$ est une topologie sur X si, et seulement si, les trois conditions suivantes sont satisfaites :

(1) $\emptyset$ et X appartiennent à $\mathfrak{O}$.

(2) Si A et B sont des éléments de $\mathfrak{O} \setminus \{\emptyset, X\}$, alors leur réunion $A \cup B$ appartient à $\mathfrak{O}$.

(3) Si A et B sont des éléments de $\mathfrak{O} \setminus \{\emptyset, X\}$, alors leur intersection $A \cap B$ appartient $\mathfrak{O}$.

Démonstration :

Si $\mathfrak{O}$ est une topologie sur X, alors les conditions **(1)**, **(2)** et **(3)** sont satisfaites. Ceci est une conséquence immédiate de la définition de la notion de topologie.

Réciproquement, nous supposons que les conditions **(1)**, **(2)** et **(3)** sont vérifiées. Soit $\mathfrak{A}$ une partie de $\mathfrak{O}$. Alors, $\bigcup \mathfrak{A} = X$ si $X \in \mathfrak{A}$, tandis que $\bigcup \mathfrak{A} = \emptyset$, si $\mathfrak{A} = \emptyset$ ou $\mathfrak{A} = \{\emptyset\}$; autrement, comme l'ensemble $\mathscr{P}(X)$ est fini, l'union $\bigcup \mathfrak{A}$ peut être écrite comme une réunion finie d'ensembles de $\mathfrak{O}$. D'après **(1)** et **(2)**, il en résulte que toute réunion d'éléments de $\mathfrak{O}$ appartient à $\mathfrak{O}$. Du reste, l'intersection de deux éléments de $\mathfrak{O}$ est $\emptyset$ si un des deux est vide, ou égal à un des deux éléments si l'autre est égal à X ; autrement, elle est l'intersection de deux éléments appartenant à $\mathfrak{O} \setminus \{\emptyset, X\}$. De ce fait, l'intersection de deux éléments de $\mathfrak{O}$ appartient à $\mathfrak{O}$. Par conséquent, si les conditions **(1)**, **(2)** et **(3)** sont satisfaites, alors $\mathfrak{O}$ est une topologie sur X. $\square$

Sur chaque ensemble (fini ou infini), en dehors de la topologie indiscrète et de la topologie discrète, il existe d'autres topologies triviales que la proposition 2 ci-dessous révèle.

Proposition 2.

Soit X un ensemble. Alors, pour toute partie A de X, l'ensemble $\mathfrak{O}_A = \Big\{\emptyset, A, X\Big\}$ est une topologie sur X. Elle est appelée **topologie engendrée** par A.

Démonstration :

Nous établissons aisément que toute réunion d'éléments de $\mathfrak{O}_A$ appartient à $\mathfrak{O}_A$, et que toute intersection de deux éléments de $\mathfrak{O}_A$ appartient à $\mathfrak{O}_A$. Ceci est suffisant pour conclure la preuve, car $\emptyset$ et X sont des éléments de $\mathfrak{O}_A$. □

1. Toutes les topologies d'un ensemble de deux éléments

Soit l'ensemble $X = \{a, b\}$, où a et b sont distincts. Alors,

$$\mathscr{P}(X) = \Big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\Big\}.$$

Par définition, chaque topologie sur X est une partie de $\mathscr{P}(X)$ contenant $\emptyset$ et X. Il y en a exactement quatre ; à savoir :

$$\Big\{\emptyset, X\Big\}, \qquad \Big\{\emptyset, \{a\}, X\Big\}, \qquad \Big\{\emptyset, \{b\}, X\Big\} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{P}(X).$$

Chacune de ces quatre parties de $\mathscr{P}(X)$ est une topologie de X ; ce fait de déduit facilement des propositions 1 et 2 ci-dessus. Par conséquent, il y a exactement **quatre** topologies sur l'ensemble $X = \{a, b\}$: la *topologie indiscrète* $\Big\{\emptyset, X\Big\}$, la *topologie discrète* $\mathscr{P}(X)$, ainsi que les topologies

$$\Big\{\emptyset, \{a\}, X\Big\} \qquad \text{et} \qquad \Big\{\emptyset, \{b\}, X\Big\},$$

engendrées respectivement par les singletons $\{a\}$ et $\{b\}$.

✍

Notons que, dans le cas d'un ensemble X ayant deux éléments, toutes les parties de $\mathscr{P}(X)$ contenant $\emptyset$ et X sont des topologies sur X, c'est-à-dire, seulement **4** parmi les $2^4 = 16$ sous-ensembles de $\mathscr{P}(X)$.

2. Toutes les topologies d'un ensemble de trois éléments

Soit l'ensemble $X = \{a, b, c\}$, où a, b et c sont deux-à-deux distincts. Alors,

$$\mathscr{P}(X) = \Big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\Big\}.$$

Il y a exactement $2^6 = 64$ sous-ensembles de $\mathscr{P}(X)$ contenant $\emptyset$ et X ; en effet, tout sous-ensemble de $\mathscr{P}(X)$ qui contient $\emptyset$ et X a la forme $\Big\{\emptyset, X\Big\} \cup \mathfrak{A}$, où $\mathfrak{A}$ est une partie de $\mathscr{P}(X)\backslash\Big\{\emptyset, X\Big\}$. Il serait fastidieux de vérifier si chacun de ces 64 sous-ensembles de $\mathscr{P}(X)$ est une topologie sur X, comme nous l'avons fait dans la section précédente pour les ensembles à deux éléments. Heureusement, nous pouvons éliminer un grand nombre de ces 64 sous-ensembles de $\mathscr{P}(X)$ en notant ce qui suit :

> ✍
>
> Si une topologie $\mathfrak{O}$ sur $X = \{a, b, c\}$ contient les trois singletons $\{a\}$, $\{b\}$ et $\{c\}$ (respectivement les trois paires $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ et $\{b, c\}$), alors $\mathfrak{O} = \mathscr{P}(X)$.

En effet, $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$ et $\{a\} \cup \{c\} = \{a, c\}$, puis $\{b\} \cup \{c\} = \{b, c\}$. De plus,

$$\{a, b\} \cap \{a, c\} = \{a\}, \quad \{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\} \quad \text{et} \quad \{a, c\} \cap \{b, c\} = \{c\}.$$

> ✍
>
> Par conséquent, en dehors de la topologie indiscrète $\Big\{\emptyset, X\Big\}$, de la topologie discrète $\mathscr{P}(X)$, et des **six** topologies engendrées par chacun des six éléments de $\mathscr{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$ (voir la proposition 2 à la page 2), toute autre topologie sur X contient exactement m singletons et n paires, où $m \in \{1, 2\}$ et $n \in \{1, 2\}$.

Pour tout couple $(m, n) \in \{1, 2\} \times \{1, 2\}$, soit $\mathfrak{T}_{m,n}$ l'ensemble des topologies sur X qui contiennent exactement m singletons et n paires.

L'ensemble $\mathfrak{T}_{1,1}$ a exactement **neuf** éléments :

$$\Big\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\Big\}; \qquad \Big\{\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, X\Big\}; \qquad \Big\{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\Big\};$$
$$\Big\{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, X\Big\}; \qquad \Big\{\emptyset, \{b\}, \{a, c\}, X\Big\}; \qquad \Big\{\emptyset, \{b\}, \{b, c\}, X\Big\};$$
$$\Big\{\emptyset, \{c\}, \{a, b\}, X\Big\}; \qquad \Big\{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, X\Big\}; \qquad \Big\{\emptyset, \{c\}, \{b, c\}, X\Big\}.$$

À l'évidence, si une topologie sur X contient deux singletons et une paire, alors la paire est la réunion des deux singletons. De ce fait, l'ensemble $\mathfrak{T}_{2,1}$ possède précisément **trois** éléments :

$$\Big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\Big\}; \quad \Big\{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, X\Big\}; \quad \Big\{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, X\Big\}.$$

Deux paires quelconques de $\mathscr{P}(X)$ ont un unique élément en commun. Donc, si une topologie sur X contient exactement un singleton et deux paires, alors le singleton est l'intersection de deux paires. Ceci induit que l'ensemble $\mathfrak{T}_{1,2}$ a exactement **trois** éléments :

$$\Big\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\Big\}; \ \Big\{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\Big\}; \ \Big\{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\Big\}.$$

Si une topologie sur X contient exactement deux singletons et deux paires, alors la réunion des deux singletons est l'une des deux paires, et l'autre paire peut être chacune des deux paires restantes de $\mathscr{P}(X)$. Par conséquent, l'ensemble $\mathfrak{T}_{2,2}$ a précisément **six** éléments :

$$\Big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, X\Big\}; \qquad \Big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, X\Big\};$$

$$\Big\{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, X\Big\}; \qquad \Big\{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}, X\Big\};$$

$$\Big\{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, X\Big\}; \qquad \Big\{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}, X\Big\}.$$

Toutes les topologies sur l'ensemble à trois éléments $X = \{a,b,c\}$ sont ainsi déterminées ; il s'agit de la topologie indiscrète $\Big\{\emptyset, X\Big\}$, de la topologie discrète $\mathscr{P}(X)$, des **six** topologies

$$\Big\{\emptyset, \{a\}, X\Big\}, \qquad \Big\{\emptyset, \{b\}, X\Big\}, \qquad \Big\{\emptyset, \{c\}, X\Big\},$$

$$\Big\{\emptyset, \{a,b\}, X\Big\}, \qquad \Big\{\emptyset, \{a,c\}, X\Big\}, \qquad \Big\{\emptyset, \{b,c\}, X\Big\},$$

engendrées respectivement par chacun des six éléments de $\mathscr{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$, ainsi que des éléments ci-dessus listés de la réunion

$$\mathfrak{T}_{1,1} \cup \mathfrak{T}_{2,1} \cup \mathfrak{T}_{1,2} \cup \mathfrak{T}_{2,2}.$$

✍

Tout compte fait, parmi les $2^8 = 256$ sous-ensembles de $\mathscr{P}(X)$, seulement 64 contiennent $\emptyset$ et X ; parmi ces 64, simplement $2 + 6 + 9 + 3 + 3 + 6 =$ **29** sont des topologies sur X.