Quelques traits des anneaux de Boole

Christian V. Nguembou Tagne

10 juin 2021

Dans ce texte, nous examinons quelques traits des anneaux de Boole.

Définition 1.

Un anneau $(A, +, \cdot)$ est dit de **Boole**, s'il est non nul et si $x^2 = x$ pour tout $x \in A$.

1. Exemples d'anneaux de Boole

Tout anneau, constitué exclusivement de l'élément nul 0 et de l'unité 1, est de Boole. Notamment, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau de Boole (voir ci-dessous les tables d'addition et de multiplication des classes modulo 2).

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$

$\times$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

De même, pour tout ensemble non-vide E, le triplet $\left(\mathscr{P}(E), \Delta, \cap\right)$ est un anneau de Boole.

2. Éléments inversibles d'un anneau de Boole

✍

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau de Boole. Alors, l'unité de cet anneau est l'unique élément inversible.

L'unité de l'anneau étant symbolisé ici par 1, soit x un élément inversible de cet anneau. Alors, il existe un élément $x' \in A$ tel que $xx' = x'x = 1$. Pour tout $a \in A$, nous avons donc

$$xa = 1 \cdot (xa) = (x'x) \cdot (xa) = x'(x^2)a = (x'x)a = 1 \cdot a = a$$

et

$$ax = (ax) \cdot 1 = (ax) \cdot (xx') = a(x^2)x' = a(xx') = a \cdot 1 = a.$$

Ceci signifie que x est neutre pour la multiplication sur A. De ce fait, $x = 1$. Par conséquent, 1 est le seul élément inversible pour la multiplication sur A.

3. Commutativité des anneaux de Boole

> ✍
>
> Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau de Boole, d'élément nul 0. Alors, $x + x = 0$ pour tout $x \in A$. Autrement dit, tout anneau de Boole est de caractéristique 2.

Soit 1 l'unité de cet anneau. Alors, pour tout $x \in A$, nous avons

$$\begin{aligned} x + 1 = (x+1)(x+1) = x(x+1) + 1 \cdot (x+1) &= x^2 + (x \cdot 1) + (1 \cdot x) + (1 \cdot 1) \\ &= x + x + x + 1. \end{aligned}$$

Ceci induit $0 = x + x$.

> ✍
>
> Tout anneau de Boole est commutatif.

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau de Boole, d'élément nul 0 et d'unité 1, soient a et b des éléments de A. Alors,

$$\begin{aligned} a + b = (a+b)(a+b) = a(a+b) + b(a+b) &= a^2 + (ab) + (ba) + b^2 \\ &= a + (ab) + (ba) + b. \end{aligned}$$

Ceci entraîne $0 = (ab) + (ba)$. Du reste, $(ab) + (ab) = 0$. Il en résulte que

$$(ab) + (ab) = (ab) + (ba),$$

et donc $ab = ba$.

4. La relation d'ordre naturelle sur un anneau de Boole

> ✍
>
> Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau de Boole. Alors, une *relation d'ordre* $\leq$ est définie sur A par : $x \leq y$ s'il existe un $a \in A$ tel que $x = ay$.

Réflexivité : Pour tout $x \in A$, nous avons $x \leq x$, car $x = 1 \cdot x$.

Antisymétrie : Soient x et y des éléments de A tels que $x \leq y$ et $y \leq x$. Alors, il existe des éléments a et b de A tels que $x = ay$ et $y = bx$. De ce fait,

$$xy = (ay)y = ay^2 = ay = x \qquad \text{et} \qquad yx = (bx)x = bx^2 = bx = y.$$

Puisque l'anneau $(A, +, \cdot)$ est commutatif, il en résulte que $x = y$.

Transitivité : Soient x, y et z des éléments de A tels que $x \leq y$ et $y \leq z$. Alors, il existe des éléments a et b de A tels que $x = ay$ et $y = bz$. D'où $x = a(bz) = (ab)z$. Par conséquent, $x \leq z$.

✍

Cette relation d'ordre $\leq$ sur un anneau $(A, +, \cdot)$ de Boole peut également être définie comme suit : $x \leq y$ si et seulement si $xy = x$.

En effet, pour tout couple (x, y) d'éléments de A, l'égalité $xy = x$ entraîne $x \leq y$. Réciproquement, si $x \leq y$, alors il existe un $a \in A$ tel que $x = ay$, et donc

$$xy = (ay)y = ay^2 = ay = x.$$