Introduction à la théorie des magmas

Théorèmes d'isomorphisme

Christian V. Nguembou Tagne

14 juillet 2021

Précédemment, nous avons étudié les *lois et magmas quotients*. Nous avons également démontré le théorème de *décomposition canonique* des homomorphismes de magmas. Dans cet article, nous démontrons deux *théorèmes d'isomorphisme* pour les magmas, ainsi qu'un résultat sur la relation d'équivalence *compatible* avec la loi d'un magma et *engendrée* par une famille de couples d'éléments dudit magma.

1. Premier théorème d'isomorphisme

D'entrée de jeu, nous établissons l'existence d'inverses à droite pour toute application surjective.

Proposition 1.

Pour qu'une application f de E dans F soit surjective, il faut et il suffit qu'il existe une application s de F dans E telle que $f \circ s$ soit l'application identique de F. Une telle application s est appelée **section** ou **inverse à droite** de f.

Démonstration :

Soit f une application de E dans F. S'il existe une application s de F dans E telle que $f \circ s$ soit l'application identique de F, alors $B = f\big(s(B)\big) \subset f(A) \subset B$, et donc f est surjective.

Si l'application f est surjective, alors, pour tout $y \in F$, l'image inverse E_y du singleton $\{y\}$ par f est non vide ; l'*axiome du choix* permet donc de choisir un élément $s(y)$ dans E_y. Une application s de F dans E est ainsi définie ; elle satisfait manifestement $f\big(s(y)\big) = y$ pour tout $y \in F$. $\square$

La proposition 2 suivante révèle une caractérisation de la compatibilité d'une application avec une relation d'équivalence.

Proposition 2.

Soit R une relation d'équivalence sur un ensemble E, et g l'application canonique de E sur E/R. Pour qu'une application f de E dans F soit compatible avec R, il faut et il suffit qu'elle puisse se mettre sous la forme $h \circ g$, où h est une application de E/R dans F. Cette application h est uniquement déterminée par f ; en effet, si s est une section de g, alors $h = f \circ s$.

Démonstration :

Soit f une application de E dans F telle que $f = h \circ g$, où h est une application de E/R dans F. Alors, pour tout couple (x, x') d'éléments de E satisfaisant $x \equiv x' \pmod R$, nous avons $g(x) = g(x')$, puis $f(x) = h\big(g(x)\big) = h\big(g(x')\big) = f(x')$. L'application f est donc compatible avec R.

Soit f une application de E dans F compatible avec R. Nous considérons une section s associée à g, c'est-à-dire une application de E/R dans E telle que $g \circ s$ soit l'application identique de E/R, puis posons $h = f \circ s$. Alors, pour tout élément x de E, nous avons

$$g\big((s \circ g)(x)\big) = (g \circ s)\big(g(x)\big) = g(x),$$

c'est-à-dire $x \equiv (s \circ g)(x) \pmod R$; ceci entraîne $f(x) = f\big((s \circ g)(x)\big)$, et donc $f = h \circ g$. Si s_1 et s_2 sont deux sections associées à g, alors, pour toute classe c suivant R, nous avons $g\big(s_1(c)\big) = c = g\big(s_2(c)\big)$, c'est-à-dire $s_1(c) = s_2(c)$; d'où $f\big(s_1(c)\big) = f\big(s_2(c)\big)$. Ainsi, $f \circ s_1 = f \circ s_2$. L'application h ne dépend donc pas du choix de la section associée à g. Au demeurant, pour toute application k de E/R dans F, l'égalité $f = k \circ g$ induit $k = h$; d'où l'unicité de h. $\square$

✍

Cette application h de la proposition 2 est appelée **application déduite** de f **par passage au quotient** suivant R.

Des relations d'équivalence sur un même ensemble peuvent être comparée selon des modalités que la définition 1 ci-dessous précise.

Définition 1.

Soient R et S deux relations d'équivalence sur un ensemble E. La seconde S est dite **plus fine** que la première R (resp. la R **moins fine** que S) lorsque, pour tout couple (x, x') d'éléments de E, la relation $x \equiv x' \pmod S$ entraîne $x \equiv x' \pmod R$. Ceci signifie que le graphe de S est contenu dans le graphe de R.

Exemple 1.

Sur l'ensemble $\mathbb{Z}$, la relation de congruence modulo 4 est *plus fine* que celle modulo 2.

Proposition 3.

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F, et S une relation d'équivalence sur F. Si g est l'application canonique de F sur F/S, la relation d'équivalence associée à l'application $g \circ f$ de E dans F/S s'appelle **image réciproque** de S par f ; si R désigne cette relation, $x \equiv x' \pmod{R}$ équivaut à $f(x) \equiv f(x') \pmod{S}$; les classes d'équivalence suivant R sont les images réciproques par f des classes d'équivalence suivant S qui rencontrent $f(E)$.

Démonstration :

Soient x et x' des éléments de E. Par définition, pour avoir la relation $x \equiv x' \pmod{R}$, il faut et il suffit que $g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big)$, c'est-à-dire $f(x) \equiv f(x') \pmod{S}$.

Soit C une classe d'équivalence suivant R, et $x \in C$. Alors, pour tout $x' \in C$, nous avons $x' \equiv x \pmod{R}$; ceci induit $f(x') \equiv f(x) \pmod{S}$, puis $f(x') \in g\big(f(x)\big)$ et x' appartient à l'image inverse par f de $g\big(f(x)\big)$. Réciproquement, si y est un élément de l'image inverse par f de $g\big(f(x)\big)$, alors $f(y) \equiv f(x) \pmod{S}$, c'est-à-dire $y \equiv x \pmod{R}$, et donc $y \in C$. D'où C est l'image inverse par f de $g\big(f(x)\big)$.

Les classes d'équivalence suivant R sont donc les images réciproques par f des classes d'équivalence suivant S qui rencontrent $f(E)$. $\square$

La proposition 4 suivante pose les bases du premier théorème d'isomorphisme pour les magmas. Elle introduit au passage le concept de quotient de deux relations d'équivalence définies sur un même ensemble et comparables.

Proposition 4.

Soient R et S deux relations d'équivalence sur un ensemble E telles que S soit plus fine que R. Soient f et g les applications canoniques respectives de E sur E/R et de E sur R/S. L'application f est compatible avec S. Soit h l'application déduite de f par passage au quotient suivant S ; c'est une application de E/S sur E/R. La relation d'équivalence sur E/S associée à h s'appelle le **quotient de R par S** et se désigne par R/S ; la relation $x \equiv x' \pmod{R}$ est équivalente à $g(x) \equiv g(x') \pmod{R/S}$; les classes d'équivalences suivant R/S sont les images par g des classes d'équivalence suivant R. Soit $h = j \circ h_2 \circ h_1$ la décomposition canonique de h.

$$\begin{tikzcd} E/S \arrow[r, "h"] \arrow[d, "h_1"'] & E/R \\ (E/S)/(R/S) \arrow[r, "h_2"'] & E/R \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd}$$

Donc, h_1 est l'application canonique de E/S sur $(E/S)/(R/S)$, puis j est l'application identique de E/R, et h_2 est une application bijective de $(E/S)/(R/S)$ sur E/R. L'application h_2 et son application réciproque sont dites **canoniques**.

Démonstration :

Puisque S est plus fine que R, pour tout couple (x, x') d'éléments de E, la relation $x \equiv x' \pmod{S}$ entraîne $x \equiv x' \pmod{R}$, c'est-à-dire $f(x) = f(x')$. L'application f est donc compatible avec S.

Soit h l'application déduite de f par passage au quotient suivant S. Alors, h est une application de E/S sur E/R satisfaisant $f = h \circ g$. Donc, pour la relation d'équivalence R/S sur E/S associée à h, la relation $x \equiv x' \pmod{R}$ est équivalente à $g(x) \equiv g(x') \pmod{R/S}$.

Soit C une classe d'équivalence suivant R/S et x un élément de E tel que $g(x)$ appartiennent à C. Alors, pour tout élément x' de E tel que $g(x')$ appartienne à C, nous avons $g(x) \equiv g(x') \pmod{R/S}$. Ceci entraîne $x \equiv x' \pmod{R}$, puis $x' \in f(x)$. D'où $g(x') \in g\big(f(x)\big)$. La classe C est donc contenue dans $g\big(f(x)\big)$.

Du reste, si y et $g(y)$ appartiennent respectivement à E et à $g\big(f(x)\big)$, alors il existe un élément x' de $f(x)$ tel que $g(y) = g(x')$. Cependant, l'appartenance de x' à $f(x)$ équivaut à la relation $x \equiv x' \pmod{R}$. Cette dernière étant équivalente à $g(x) \equiv g(x') \pmod{R/S}$, il en découle que $g(y) \equiv g(x) \pmod{R/S}$, et donc que $g(y)$ est un élément de la classe C. D'où $g\big(f(x)\big)$ est une partie de C. Par conséquent, $C = g\big(f(x)\big)$. □

✍

Les classes d'équivalences suivant la relation d'équivalence quotient R/S de la proposition 4 sont donc les images par g des classes d'équivalence suivant R.

Cette observation permet de démontrer le résultat suivant.

Proposition 5.

Soit S une relation d'équivalence sur un ensemble E, et g l'application canonique de E sur E/S. Considérons par ailleurs une relation d'équivalence quelconque T sur l'ensemble quotient E/S, et R la relation d'équivalence sur E, image réciproque par g de T. Alors, T est équivalente à R/S.

Démonstration :

Soient x et x' des éléments de E. Alors, $x \equiv x' \pmod{R}$ équivaut à $g(x) \equiv g(x') \pmod{T}$, d'après la définition de l'image réciproque d'une relation d'équivalence (voir la proposition 3). Cependant, si $x \equiv x' \pmod{S}$, alors $g(x) = g(x')$, et donc $g(x) \equiv g(x') \pmod{T}$ (compte tenu de la réflexivité de T), c'est-à-dire $x \equiv x' \pmod{R}$. De ce fait, la relation d'équivalence S est plus fine que R. La relation d'équivalence quotient R/S est par conséquent bien définie. En vertu de la proposition 4, la relation $g(x) \equiv g(x') \pmod{R/S}$ est équivalente à $x \equiv x' \pmod{R}$. Ceci signifie que T est équivalente à R/S. □

Les définitions et résultats précédents permettent de conclure cette section par la formulation et la démonstration du premier théorème d'isomorphisme pour les magmas.

Théorème 1 (Premier théorème d'isomorphisme).

Soit E un magma et R une relation d'équivalence sur E compatible avec la loi de E. Pour qu'une relation d'équivalence S sur E/R soit compatible avec la loi quotient, il faut et il suffit que S soit de la forme T/R, où T est une relation d'équivalence sur E, moins fine que R et compatible avec la loi de E. L'application canonique de E/T sur $(E/R)/(T/R)$ est alors un isomorphisme de magmas.

Démonstration :

Nous désignons par $\perp$ la loi de composition du magma E et par g l'homomorphisme canonique de E sur E/R.

Soit S une relation d'équivalence sur E/R compatible avec la loi quotient, puis T l'image réciproque de S par g. Alors, pour tout couple (x, x') d'éléments de E, nous avons :

$$x \equiv x' \pmod{T} \Leftrightarrow g(x) \equiv g(x') \pmod{S}.$$

La relation $x \equiv x' \pmod{R}$ induit par ailleurs $g(x) = g(x')$, puis $g(x) \equiv g(x') \pmod{S}$; d'où $x \equiv x' \pmod{T}$. La relation d'équivalence R est donc plus fine que T.

Les relations $x \equiv x' \pmod{T}$ et $y \equiv y' \pmod{T}$ sont équivalentes à $g(x) \equiv g(x') \pmod{S}$ et $g(y) \equiv g(y') \pmod{S}$; elles entraînent de ce fait

$$g(x) \perp g(y) \equiv g(x') \perp g(y') \pmod{S},$$

c'est-à-dire $g(x \perp y) \equiv g(x' \perp y') \pmod{S}$; d'où $x \perp y \equiv x' \perp y' \pmod{T}$. La relation T est donc compatible avec la loi $\perp$ de E.

Par définition du quotient de T par R, la relation $g(x) \equiv g(x') \pmod{T/R}$ est équivalente à $x \equiv x' \pmod{T}$, et donc à $g(x) \equiv g(x') \pmod{S}$. D'où la relation S est équivalente à T/R.

Nous supposons à présent que S est une relation d'équivalence sur E/R de la forme T/R, où T est une relation d'équivalence sur E, moins fine que par R et compatible avec la loi de E. Soient x, x', y et y' des éléments de E vérifiant $g(x) \equiv g(x') \pmod{S}$ et $g(y) \equiv g(y') \pmod{S}$. Alors, $g(x) \equiv g(x') \pmod{T/R}$ et $g(y) \equiv g(y') \pmod{T/R}$. Ces dernières relations sont équivalentes à $x \equiv x' \pmod{T}$ et $y \equiv y' \pmod{T}$. D'où $x \perp y \equiv x' \perp y' \pmod{T}$. Ceci équivaut à $g(x \perp y) \equiv g(x' \perp y') \pmod{T/R}$, c'est-à-dire $g(x) \perp g(y) \equiv g(x') \perp g(y') \pmod{T/R}$, et donc $g(x) \perp g(y) \equiv g(x') \perp g(y') \pmod{S}$. La relation d'équivalence S est par conséquent compatible avec la loi quotient.

Soit f l'application canonique de E sur E/T. Nous avons établi que l'application canonique de E/T sur $(E/R)/(T/R)$ est bijective (voir la proposition 4 à la page 3). Pour conclure, nous devons prouver qu'elle est un homomorphisme de magmas. Il suffit de montrer qu'il en est de même pour l'application h déduite de f par passage au quotient suivant R, définie de E/R sur E/T. Tel est le cas, car $f = h \circ g$ est un homomorphisme. □

2. Deuxième théorème d'isomorphisme

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F, puis R une application d'équivalence sur E, et S une application d'équivalence de sur F. En outre, soit u l'application canonique de E sur E/R, et v l'application canonique de F sur F/S. L'application f est dite **compatible avec les relations d'équivalence** R et S si $v \circ f$ est compatible avec R ; cela signifie que la relation $x \equiv x' \pmod R$ entraîne $f(x) \equiv f(x') \pmod S$. L'application h de E/R dans E/S déduite de $v \circ f$ par passage au quotient suivant R s'appelle alors l'**application déduite de f par passage aux quotients suivant** R et S ; elle est caractérisée par la relation $v \circ f = h \circ u$ (voir le diagramme suivant) :

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & F \arrow[d, "v"] \\
E/R \arrow[r, "h"'] & F/S
\end{tikzcd}$$

Nous allons construire un isomorphisme entre deux magmas quotients sur le modèle de l'application h ci-dessus. Mais, au préalable, nous rappelons quelques notions de la théorie des relations d'équivalence.

Définition 2.

Soit R une relation d'équivalence sur un ensemble E. Une partie A de E est dite **saturée** pour R si, pour tout $x \in A$, la classe d'équivalence de x est contenue dans A. En d'autres termes, pour qu'un ensemble soit saturé pour R, il faut et il suffit qu'il soit réunion d'un ensemble de classes d'équivalence suivant R.

Le **saturé** d'une partie quelconque A de E est la réunion des classes d'équivalence des éléments de A.

Une relation d'équivalence sur un ensemble peut être restreinte à une partie non vide.

Proposition 6.

Soit R une relation d'équivalence sur un ensemble E, et A une partie de E. L'image réciproque de R par l'injection j de A dans E s'appelle **relation d'équivalence induite** par E sur A, et se note R_A.

Les classes d'équivalence suivant R_A sont les traces sur A des classes d'équivalence suivant R qui rencontrent A. L'injection j est compatible avec les relations R_A et R. L'application h de A/R_A dans E/R déduite de j par passage aux quotients de R_A et R est *injective* ; son image $h(A/R_A)$ est l'image de A par l'application canonique de E sur E/R. La bijection de A/R_A sur $f(A)$ déduite de h par passage aux sous-ensembles A/R_A et $f(A)$, et sa réciproque sont dites **canoniques**.

Démonstration :

Nous avons $j(A) = A$ et $j^{-1}(B) = B \cap A$ pour toute partie B de E. Compte tenu des propriétés des images réciproque des relations d'équivalence (voir la proposition 3 à la page 3), il en résulte que les classes d'équivalence suivant R_A sont les traces sur A des classes d'équivalence suivant R qui rencontrent A.

Soit f l'application canonique de E sur E/R. Par définition, pour tout couple (x, x') d'éléments de A, la relation $x \equiv x' \pmod{R_A}$ est équivalente à $(f \circ j)(x) = (f \circ j)(x')$, c'est-à-dire $j(x) \equiv j(x') \pmod{R}$. Ceci induit la compatibilité de l'injection j avec les relations R_A et R coule de source.

Soit g l'application canonique de A sur A/R_A, puis h l'application de A/R_A dans E/R déduite de j par passage aux quotients de R_A et R. Alors, $f \circ j = h \circ g$. De ce fait, pour chaque couple (x, x') d'éléments de A, l'égalité $h\big(g(x)\big) = h\big(g(x')\big)$ entraîne $f\big(j(x)\big) = f\big(j(x')\big)$, et donc $x \equiv x' \pmod{R_A}$, c'est-à-dire $g(x) = g(x')$. D'où l'injectivité de l'application h.

Puisque $j(A) = A$ et $g(A) = A/R_A$, l'égalité $f \circ j = h \circ g$ livre $h(A/R_A) = f(A)$. $\square$

Théorème 2 (Deuxième théorème d'isomorphisme).

Soit E un magma, A une partie stable de E, et R une relation d'équivalence sur E, compatible avec la loi de E. Le saturé B de A pour R est une partie stable. Les relations R_A et R_B induites par R sur A et B respectivement sont compatibles avec les lois induites. En outre, l'application déduite de l'injection canonique de A dans B par passage aux quotients est un isomorphisme de magmas de A/R_A sur B/R_B.

Démonstration :

La loi de E étant noté $\top$, soient x et y des éléments de B. Alors, il existe des éléments x' et y' de A tels que $x \equiv x' \pmod{R}$ et $y \equiv y' \pmod{R}$. Ceci induit $x \top y \equiv x' \top y' \pmod{R}$, puisque R est compatible avec la loi de E. Du reste, $x' \top y' \in A$, car A est une partie stable du magma E. Par conséquent, $x \top y \in B$, et donc le saturé B de A est également une partie stable de E.

Évidemment, les relations R_A et R_B induites par R sur A et B respectivement sont compatibles avec les lois induites ; les applications canoniques g de A sur A/R_A et f de B sur B/R_B sont des homomorphismes.

Soit j l'injection canonique de A dans B. Elle est manifestement un homomorphisme. Nous savons en outre que l'application h déduite de j de A dans B par passage aux quotients est une *injection* de A/R_A dans B/R_B. Au demeurant, $f \circ j = h \circ g$. Puisque f et j sont des homomorphismes, cette égalité entraîne qu'il en est de même pour le composé $h \circ g$. De ce fait, h est un *homomorphisme*. Pour conclure, nous devons montrer que l'homomorphisme injectif h est surjectif. À cet effet, soit x un élément de B. Alors, il existe un élément x' de A tel que $x \equiv x' \pmod{R}$. Ceci induit $x \equiv x' \pmod{R_B}$ et $f(x) = f(x')$. D'où

$$f(x) = f\big(j(x')\big) = (f \circ j)(x') = (h \circ g)(x') = h\big(g(x')\big).$$

Tout élément de B/R_B admet donc un antécédent dans A/R_A par h. Par conséquent, h est un isomorphisme de magmas de A/R_A sur B/R_B. $\square$

3. Relation d'équivalence engendrée par une famille de couples d'éléments d'un magma

Proposition 7.

Soit M un magma et $(u_\alpha, v_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille d'éléments de $M \times M$. Considérons l'ensemble $\mathfrak{S}$ de toutes les relations d'équivalence S dans M qui sont compatibles avec la loi de M, et telles que $u_\alpha \equiv v_\alpha \pmod{S}$ pour tout $\alpha \in I$. L'intersection des graphes de ces relations est le graphe d'une relation d'équivalence R, qui est compatible avec la loi de M, et telle que $u_\alpha \equiv v_\alpha \pmod{R}$. Donc, R est la **plus fine** des relations d'équivalence possédant ces deux propriétés. Elle est appelée relation d'équivalence compatible avec la loi de M et **engendrée** par les (u_α, v_α).

Démonstration :

On vérifie facilement que R est une relation d'équivalence sur M.

La loi de M étant désignée par $\top$, soient x, x', y et y' des éléments de M tels que $x \equiv x' \pmod{R}$ et $y \equiv y' \pmod{R}$. Alors, $x \equiv x' \pmod{S}$ et $y \equiv y' \pmod{S}$ pour tout $S \in \mathfrak{S}$. Ceci entraîne $x \top y \equiv x' \top y' \pmod{S}$, car chaque élément de $\mathfrak{S}$ est compatible avec $\top$. D'où $x \top y \equiv x' \top y' \pmod{R}$. La relation d'équivalence R est donc compatible avec $\top$. La relation $u_\alpha \equiv v_\alpha \pmod{R}$ pour tout $\alpha \in I$ s'obtient de manière analogue. □

Proposition 8.

Soit M un magma, et $(u_\alpha, v_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille d'éléments de $M \times M$, puis R la relation d'équivalence compatible avec la loi de M et engendrée par les (u_α, v_α). En outre, soit f un homomorphisme de M dans un magma tel que $f(u_\alpha) = f(v_\alpha)$ pour tout $\alpha \in I$. Alors, f est compatible avec R.

Démonstration :

Soit W la relation d'équivalence associée à f, puis $\top$ la loi du magma M. Alors, les relations $x \equiv x' \pmod{W}$ et $y \equiv y' \pmod{W}$ sont équivalentes à $f(x) = f(x')$ et $f(y) = f(y')$. Elles induisent donc $f(x \top x') = f(x) \top f(y) = f(x') \top f(y')$, puisque f est homomorphisme. De ce fait, les relations $x \equiv x' \pmod{W}$ et $y \equiv y' \pmod{W}$ entraînent $x \top y \equiv x' \top y' \pmod{W}$. Ceci signifie que W est compatible avec la loi de M. Au demeurant, d'après l'hypothèse, $u_\alpha \equiv v_\alpha \pmod{W}$ pour tout $\alpha \in I$. Donc, W est moins fine que R. Ceci signifie que f est compatible avec R. □

Références

[1] N. Bourbaki, **Algèbre : Chapitres 1 à 3**, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007.

[2] N. Bourbaki, **Théorie des ensembles**, Springer, Berlin, Heidelberg, 2006.