Une équation matricielle, transposées de matrices équivalentes et rang du produit de deux matrices

Christian V. Nguembou Tagne

9 juillet 2021

Dans cet article, nous répondons à trois questions indépendantes d'algèbre matricielle.

1. Résolution d'une équation matricielle

Dans cette section, nous résolvons dans l'algèbre $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation

$$X^2 + X + \mathbf{1}_2 = \mathbf{0}_2.$$

À cet effet, nous considérons dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ la matrice $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Alors,

$$X^2 + X = \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc+a & ab+bd+b \\ ac+cd+c & bc+d^2+d \end{bmatrix}.$$

De ce fait, $X^2 + X + \mathbf{1}_2 = \mathbf{0}_2$ si, et seulement si,

$$\left\{\begin{aligned} bc + a^2 + a + 1 &= 0, \\ ab + bd + b &= 0, \\ ac + cd + c &= 0, \\ bc + d^2 + d + 1 &= 0, \end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire

$$\left\{\begin{aligned} b(a+d+1) &= 0, \\ c(a+d+1) &= 0, \\ bc + a^2 + a + 1 &= 0, \\ bc + d^2 + d + 1 &= 0. \end{aligned}\right. \qquad (\mathbf{S})$$

Si $b = 0$ ou $c = 0$, alors le système $(\mathbf{S})$ entraîne

$$a^2 + a + 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad d^2 + d + 1 = 0.$$

Or, le polynôme $t^2 + t + 1$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$. Le cas $bc = 0$ est donc à éliminer.

Maintenant, soit $b \neq 0$ et $c \neq 0$. Alors, le système $(\mathbf{S})$ induit

$$\begin{cases} a + d + 1 = 0, \\ bc + a^2 + a + 1 = 0, \\ bc + d^2 + d + 1 = 0. \end{cases}$$

Ceci équivaut à

$$\begin{cases} d = -a - 1, \\ bc + a^2 + a + 1 = 0; \end{cases}$$

en effet, l'égalité $d = -a - 1$ implique

$$d^2 + d + 1 = a^2 + 2a + 1 - a - 1 + 1 = a^2 + a + 1.$$

Il en résulte que, si une matrice $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie $X^2 + X + \mathbf{1}_2 = \mathbf{0}_2$, alors

$$b \neq 0, \qquad c = -\frac{1}{b}(a^2 + a + 1) \qquad \text{et} \qquad d = -a - 1.$$

Réciproquement, si ces dernières conditions sont satisfaites, alors des calculs simples permettent d'établir que $X^2 + X + \mathbf{1}_2 = \mathbf{0}_2$.

✍

Dans l'algèbre $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, une matrice est solution de l'équation

$$X^2 + X + \mathbf{1}_2 = \mathbf{0}_2$$

si, et seulement si, elle a la forme

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ -\dfrac{a^2 + a + 1}{b} & -a - 1 \end{bmatrix},$$

où a est un réel quelconque et b un réel non nul.

2. Transposés de matrices équivalentes

Deux matrices A et B de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dites **équivalentes** s'il existe des matrices inversibles $P \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ et $Q \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $B = QAP$.

Nous rappelons également que la *transposée* d'une matrice *inversible* est elle-même inversible. Précisément, si M est une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors sa transposée $M^\top$ est également inversible et

$$\left(M^\top\right)^{-1} = \left(M^{-1}\right)^\top.$$

Maintenant soient A et B deux matrices équivalentes de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors, par définition, il existe des matrices inversibles $P \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ et $Q \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $B = QAP$. De ce fait,

$$B^\top = (QAP)^\top = P^\top A^\top Q^\top.$$

Or, les transposées $P^\top \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ et $Q^\top \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont inversibles. Puisque $A^\top$ et $B^\top$ sont des matrices de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, il en découle que $A^\top$ et $B^\top$ sont équivalentes.

> Donc, si deux matrices sont équivalentes, alors il en est de même pour leurs transposées respectives.

3. Rang du produit de deux matrices

Soient des matrices $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. Dans cette section, nous allons montrer que

$$\operatorname{rg}(AB) \leq \min\left\{\operatorname{rg}(A), \operatorname{rg}(B)\right\},$$

et nous allons donner une condition sur les applications linéaires associées L_A et L_B pour qu'il y ait égalité entre les deux membres de l'inégalité précédente.

3.1. Un majorant du rang du produit de deux matrices

Nous rappelons que le rang d'une matrice est la dimension de l'image de son application linéaire associée. En particulier,

$$\operatorname{rg}(A) = \dim\left(\operatorname{Im} L_A\right) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{rg}(B) = \dim\left(\operatorname{Im} L_B\right),$$

puis

$$\operatorname{rg}(AB) = \dim\left(\operatorname{Im} L_{AB}\right),$$

où $L_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ et $L_B : \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^n$, tandis que

$$L_{AB} = L_A \circ L_B : \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^m.$$

Cependant, l'égalité $L_{AB} = L_A \circ L_B$ induit $\operatorname{Im} L_{AB} \subset \operatorname{Im} L_A$. De ce fait,

$$\dim\left(\operatorname{Im} L_{AB}\right) \leq \dim\left(\operatorname{Im} L_A\right).$$

Autrement dit,

$$\mathrm{rg}(AB) \leq \mathrm{rg}(A). \tag{$*$}$$

Au demeurant, l'égalité $L_{AB} = L_A \circ L_B$ entraîne $\ker L_B \subset \ker L_{AB}$. D'où

$$\dim\Big(\ker L_B\Big) \leq \dim\Big(\ker L_{AB}\Big),$$

c'est-à-dire

$$-\dim\Big(\ker L_{AB}\Big) \leq -\dim\Big(\ker L_B\Big). \tag{$**$}$$

Or, d'après le **théorème du rang**, nous avons

$$\dim\Big(\mathbb{C}^p\Big) = \mathrm{rg}(AB) + \dim\Big(\ker L_{AB}\Big) \qquad \text{et} \qquad \dim\Big(\mathbb{C}^p\Big) = \mathrm{rg}(B) + \dim\Big(\ker L_B\Big).$$

Ainsi,

$$\mathrm{rg}(AB) = p - \dim\Big(\ker L_{AB}\Big) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{rg}(B) = p - \dim\Big(\ker L_B\Big).$$

Compte tenu de l'inégalité $(**)$ ci-dessus, il s'ensuit que

$$\mathrm{rg}(AB) \leq \mathrm{rg}(B). \tag{$\diamond$}$$

✍

Eu égard aux égalités $(*)$ et $(\diamond)$ ci-dessus, nous concluons que

$$\mathrm{rg}(AB) \leq \min\Big\{\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)\Big\},$$

quelles que soient les matrices $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$.

3.2. Une condition suffisante d'égalité

Soit L_A l'application linéaire associée à la matrice A et L_B celle associée à la matrice B. Dans le même esprit, L_{AB} désigne l'application linéaire associée à leur produit AB. Comme nous l'avons vu plus haut, $L_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ et $L_B : \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^n$, tandis que

$$L_{AB} = L_A \circ L_B : \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^m.$$

Nous allons montrer que, si L_A est *injective* ou L_B est *surjective*, alors

$$\mathrm{rg}(AB) = \min\Big\{\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)\Big\}.$$

Tout d'abord, soit L_A injective. Alors, $\mathrm{rg}(A) = n$, car, selon le **théorème du rang**,

$$\dim\Big(\mathbb{C}^n\Big) = \mathrm{rg}(A) + \dim\Big(\ker L_A\Big).$$

Cependant, $\mathrm{rg}(B) \leq \min\{n, p\}$. De ce fait, $\mathrm{rg}(B) \leq \mathrm{rg}(A)$. D'où

$$\mathrm{rg}(B) = \min\Big\{\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)\Big\}.$$

Maintenant, soit $X \in \ker L_{AB}$. Alors, $L_A\big(L_B(X)\big) = 0$, et donc $L_B(X) = 0$, car l'application linéaire L_A est injective. Ainsi, $\ker L_{AB} \subset \ker L_B$. Or, nous avons vu précédemment que

$$\ker L_B \subset \ker L_{AB},$$

au regard de l'égalité $L_{AB} = L_A \circ L_B$. Donc, $\ker L_{AB} = \ker L_B$ et

$$\dim\Big(\ker L_{AB}\Big) = \dim\Big(\ker L_B\Big).$$

En vertu du **théorème du rang**, il en résulte que

$$\mathrm{rg}(AB) = p - \dim\Big(\ker L_{AB}\Big) = p - \dim\Big(\ker L_B\Big) = \mathrm{rg}(B) = \min\Big\{\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)\Big\}.$$

À présent, soit L_B surjective. Alors, $\mathrm{Im}\, L_B = \mathbb{C}^n$, et donc $\mathrm{rg}(B) = n$. Cependant, $\mathrm{rg}(A) \leq \min\{m, n\}$. Ceci induit $\mathrm{rg}(A) \leq \mathrm{rg}(B)$, puis

$$\mathrm{rg}(A) = \min\Big\{\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)\Big\}.$$

Maintenant, soit $Y \in \mathrm{Im}\, L_A$. Alors, il existe un $X \in \mathbb{C}^n$ tel que $Y = L_A(X)$. Toutefois, il existe un $U \in \mathbb{C}^p$ tel que $X = L_B(U)$, car l'application linéaire L_B est surjective. D'où

$$Y = L_A\Big(L_B(U)\Big) = (L_A \circ L_B)(U) = L_{AB}(U).$$

De ce fait, $\mathrm{Im}\, L_A \subset \mathrm{Im}\, L_{AB}$. Or, nous avons vu précédemment que

$$\mathrm{Im}\, L_{AB} \subset \mathrm{Im}\, L_A,$$

au regard de l'égalité $L_{AB} = L_A \circ L_B$. Donc, $\mathrm{Im}\, L_{AB} = \mathrm{Im}\, L_A$, puis

$$\mathrm{rg}(AB) = \dim\Big(\mathrm{Im}\, L_{AB}\Big) = \dim\Big(\mathrm{Im}\, L_A\Big) = \mathrm{rg}(A) = \min\Big\{\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)\Big\}.$$

> ✍
>
> Par conséquent, si L_A est *injective* ou L_B est *surjective*, alors
>
> $$\mathrm{rg}(AB) = \min\Big\{\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)\Big\}.$$