Étude d'une famille de matrices

Christian V. Nguembou Tagne

11 juillet 2021

Dans cet article, nous proposons une étude de la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & a & \lambda \\ a & 0 & \lambda & 4a & 0 \\ a & 1 & \lambda+3 & 4a & 0 \end{bmatrix},$$

où a et λ sont des paramètres réels.

L'article est divisé trois sections. La première section dévoile une forme ligne-échelonnée de la matrice M, son rang, une base de son espace ligne, la dimension du noyau de l'application linéaire associée L_M, ainsi qu'une base de l'image de L_M. La deuxième section révèle la condition d'inversibilité à droite de la matrice, et montre qu'il existe une infinité d'inverses à droite, lorsque ladite condition est vérifiée. La troisième question est consacrée à l'étude d'une sous-matrice carrée de la matrice M.

1. Quelques faits sur la matrice et sur l'application linéaire associée

1.1. Une forme ligne-échelonnée de la matrice

Pour obtenir une forme ligne-échelonnée de la matrice M, nous exécutons premièrement sur M l'opération élémentaire $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$. Nous obtenons alors la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & a & \lambda \\ a & 0 & \lambda & 4a & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Deuxièmement, sur cette dernière, nous appliquons l'opération $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$. Ceci donne la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & a & \lambda \\ a & 0 & \lambda & 4a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a & -\lambda \end{bmatrix}.$$

Troisièmement, sur cette dernière, nous effectuons l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - aL_1$. Il en résulte la matrice
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & a & \lambda \\ 0 & -2a & \lambda+2a & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & -a & -\lambda \end{bmatrix}.$$
Quatrièmement, sur cette dernière matrice, nous opérons $L_3 \leftarrow L_3 + 2aL_2$, et obtenons
$$\widetilde{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & a & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda+8a & 2a^2 & a(2\lambda-1) \\ 0 & 0 & 0 & -a & -\lambda \end{bmatrix}.$$

Rendus à cette étape de la transformation de la matrice initiale M, nous pouvons entamer une discussion suivant les valeurs des paramètres a et λ.

Si $a \neq 0$ et $\lambda + 8a = 0$, c'est-à-dire $\lambda = -8a$, cette dernière matrice est égale à
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & a & -8a \\ 0 & 0 & 0 & 2a^2 & -16a^2-a \\ 0 & 0 & 0 & -a & 8a \end{bmatrix}.$$
Nous permutons alors sa troisième ligne et sa quatrième ligne ($L_3 \leftrightarrow L_4$). Ceci livre la matrice
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & a & -8a \\ 0 & 0 & 0 & -a & 8a \\ 0 & 0 & 0 & 2a^2 & -16a^2-a \end{bmatrix}.$$
Ensuite, sur cette dernière nous exécutons l'opération $L_4 \leftarrow L_4 + 2aL_3$, et obtenons
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & a & -8a \\ 0 & 0 & 0 & -a & 8a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a \end{bmatrix}.$$

Nous avons là une forme ligne-échelonnée de la matrice M, lorsque $a \neq 0$ et $\lambda + 8a = 0$. La matrice $\widetilde{M}$ ci-dessus est une forme ligne-échelonnée de M dans tous les autres cas.

✍

Pour $a = 0$ et $\lambda = 0$, une forme ligne-échelonnée de la matrice M est
$$M' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

✍

Pour $a = 0$ et $\lambda \neq 0$, une forme ligne-échelonnée de la matrice M est

$$M' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}.$$

✍

Pour $a \neq 0$ et $\lambda + 8a = 0$, une forme ligne-échelonnée de la matrice M est

$$M' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & a & -8a \\ 0 & 0 & 0 & -a & 8a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a \end{bmatrix}.$$

✍

Pour $a \neq 0$ et $\lambda + 8a \neq 0$, une forme ligne-échelonnée de la matrice M est

$$M' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & a & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda + 8a & 2a^2 & a(2\lambda - 1) \\ 0 & 0 & 0 & -a & -\lambda \end{bmatrix}.$$

1.2. Rang de la matrice et dimension du noyau de l'application linéaire associée

Le rang de la matrice M se déduit sans coup férir de sa forme ligne-échelonnée déterminée ci-dessus.

✍

Nous avons précisément,

$$\operatorname{rg}(M) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad a = 0 \quad \text{et} \quad \lambda = 0, \\ 4 & \text{si} \quad a = 0 \quad \text{et} \quad \lambda \neq 0, \\ 4 & \text{si} \quad a \neq 0 \quad \text{et} \quad \lambda + 8a = 0, \\ 4 & \text{si} \quad a \neq 0 \quad \text{et} \quad \lambda + 8a \neq 0. \end{cases}$$

Soit L_M l'application linéaire associée à la matrice M. D'après le **théorème du rang**, nous avons

$$\mathrm{rg}(M) + \dim\Big(\ker L_M\Big) = 5.$$

✍

Par conséquent,

$$\dim\Big(\ker L_M\Big) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad a = 0 \quad \text{et} \quad \lambda = 0, \\ 1 & \text{si} \quad a = 0 \quad \text{et} \quad \lambda \neq 0, \\ 1 & \text{si} \quad a \neq 0 \quad \text{et} \quad \lambda + 8a = 0, \\ 1 & \text{si} \quad a \neq 0 \quad \text{et} \quad \lambda + 8a \neq 0. \end{cases}$$

1.3. Une base de l'espace-ligne de la matrice

Soit $\mathrm{Lign}(M)$ le sous-espace de $\mathbb{R}^5$ engendré par les lignes de la matrice M. Alors, $\mathrm{Lign}(M)$ est également engendré par les lignes de la forme ligne-échelonnée M'. Ceci permet de tirer les conclusions suivantes.

✍

Pour $a = 0$ et $\lambda = 0$, les deux vecteurs

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

forment une base de l'espace-ligne $\mathrm{Lign}(M)$.

✍

Pour $a = 0$ et $\lambda \neq 0$, les quatre vecteurs

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

forment une base de l'espace-ligne $\mathrm{Lign}(M)$.

✍

Pour $a \neq 0$ et $\lambda + 8a = 0$, les quatre vecteurs

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ a \\ -8a \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

forment une base de l'espace-ligne $\mathrm{Lign}(M)$.

✍

Pour $a \neq 0$ et $\lambda + 8a \neq 0$, les quatre vecteurs

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ a \\ \lambda \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda + 8a \\ 2a^2 \\ a(2\lambda - 1) \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ a \\ \lambda \end{bmatrix}$$

forment une base de l'espace-ligne $\mathrm{Lign}(M)$.

1.4. Une base de l'image de l'application linéaire associée

L'image de l'application linéaire L_M associée à la matrice M est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les colonnes de M. Ce dernier étant égal au sous-espace engendré par les colonnes de la forme ligne-échelonnée M', nous pouvons conclure ce qui suit.

✍

Pour $a = 0$ et $\lambda = 0$, les deux vecteurs

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

forment une base de $\operatorname{Im} L_M$.

✍

Pour $a = 0$ et $\lambda \neq 0$, les quatre vecteurs

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}-2\\3\\\lambda\\0\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix}1\\\lambda\\0\\-\lambda\end{bmatrix}$$

forment une base de $\operatorname{Im} L_M$.

✍

Pour $a \neq 0$ et $\lambda + 8a = 0$, les quatre vecteurs

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}4\\a\\-a\\0\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix}1\\-8a\\8a\\-a\end{bmatrix}$$

forment une base de $\operatorname{Im} L_M$.

✍

Pour $a \neq 0$ et $\lambda + 8a \neq 0$, les quatre vecteurs

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}-2\\3\\\lambda+8a\\0\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix}4\\a\\2a^2\\-a\end{bmatrix}$$

forment une base de $\operatorname{Im} L_M$.

2. Condition d'inversibilité à droite de la matrice

Dans un article précédent, nous avons démontré que, pour que la matrice M soit inversible à droite, il faut et il suffit que l'application linéaire L_M soit surjective. Ceci équivaut à dire que le rang de M est égal à 4.

✍

Compte tenu des conclusions de la section 1.2 à la page 3, il en résulte que la matrice M est inversible à droite si, et seulement si, $a \neq 0$ ou $\lambda \neq 0$.

La base canonique de $\mathbb{R}^4$ est notoirement constituée des vecteurs

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Une matrice $N \in \mathscr{M}_{5,4}(\mathbb{R})$ est inverse à droite de M si, et seulement si, chacune de ses colonnes $N_{\cdot j}$, où $j \in \{1,2,3,4\}$, vérifie $MN_{\cdot j} = E_j$. En utilisant la forme ligne-échelonnée M' de la matrice M, nous montrons que, pour $a \neq 0$ ou $\lambda \neq 0$, chacun des systèmes $MX = E_j$, où $j \in \{1,2,3,4\}$, admet une infinité de solutions dans $\mathbb{R}^5$.

Donc, pour $a \neq 0$ ou $\lambda \neq 0$, la matrice M possède une infinité d'inverses à droite.

3. Étude d'une famille de sous-matrices

Dans cette section, nous supposons que $a \neq 0$ et $\lambda = -8a$. Soit A la sous-matrice M constitué des quatre premières colonnes. Autrement dit,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & a \\ a & 0 & \lambda & 4a \\ a & 1 & \lambda + 3 & 4a \end{bmatrix}.$$

3.1. Forme totalement ligne-échelonnée de la sous-matrice

D'après les développements de la section 1.1 à partir de la page 1, une forme ligne-échelonnée de la matrice A est

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Elle est obtenue à partir A en réalisant successivement les six opérations suivantes :

(1) $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$;

(2) $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$;

(3) $L_3 \leftarrow L_3 - aL_1$;

(4) $L_3 \leftarrow L_3 + 2aL_2$;

(5) $L_3 \leftrightarrow L_4$;

(6) $L_4 \leftarrow L_4 + 2aL_3$.

Pour avoir la forme totalement ligne-échelonnée de la matrice A, d'autres opérations doivent être menées :

Septièmement, sur la matrice $\widetilde{A}$, nous appliquons l'opération $L_3 \leftarrow -\frac{1}{a}L_3$, et obtenons

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Huitièmement, sur cette dernière, nous exécutons l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3$. Il en résulte

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Neuvièmement, sur cette dernière, nous réalisons l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - aL_3$. Ceci livre

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dixièmement, sur cette dernière, nous effectuons l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$. Il s'ensuit

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

✍

La forme totalement ligne-échelonnée de la matrice A est donc

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.2. Matrice de passage de la sous-matrice à sa forme totalement ligne-échelonnée

Pour déterminer la matrice de passage de A à sa forme totalement ligne-échelonnée A' (encore appelée *forme ligne-échelonnée réduite*), nous rappelons les notations des matrices élémentaires.

Nous nous situons dans l'algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans un corps commutatif $\mathbb{K}$.

Pour chaque couple (i, j) d'éléments de $[1, n] \cap \mathbb{N}$, le symbole $E_{ij}^{(n)}$ désigne la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui d'indice $[i, j]$ qui est égal à 1.

Matrices de dilatation. Pour chaque $\alpha \in \mathbb{K}$ et tout $i \in [1, n] \cap \mathbb{N}$, la notation $D_i^{(n)}(\alpha)$ symbolise la matrice diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients diagonaux valent 1, sauf celui de la i-ème ligne qui est égal à α. Autrement dit,

$$\begin{cases} D_i^{(n)}(\alpha)[k, \ell] = 0 \quad \text{si} \quad k \neq \ell, \\ D_i^{(n)}(\alpha)[k, k] = 1 \quad \text{si} \quad k \neq i, \\ D_i^{(n)}(\alpha)[i, i] = \alpha. \end{cases}$$

Matrices de permutation. Pour chaque couple (i, j) d'éléments de $[1, n] \cap \mathbb{N}$, la notation $P_{ij}^{(n)}$ désigne la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf les coefficients diagonaux des lignes distinctes de la i-ème ligne et de la j-ème ligne qui sont égaux à 1, ainsi que les coefficients de la i-ème ligne et j-ème colonne d'une part, de la j-ème ligne et i-ème colonne d'autre part, qui valent tous les deux 1. En d'autres termes,

$$\begin{cases} P_{ij}^{(n)}[k, k] = 1 \quad \text{si} \quad k \neq i \quad \text{et} \quad k \neq j, \\ P_{ij}^{(n)}[i, j] = P_{ij}^{(n)}[j, i] = 1, \\ P_{ij}^{(n)}[i, i] = P_{ij}^{(n)}[j, j] = 0, \\ P_{ij}^{(n)}[k, \ell] = 0 \quad \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

Matrices de transvection. Pour chaque couple (i, j) d'éléments de $[1, n] \cap \mathbb{N}$ et tout $\alpha \in \mathbb{K}$, la matrice $\mathbf{1}_n + \alpha E_{ij}^{(n)}$ est notée $T_{ij}^{(n)}(\alpha)$.

Ces notations des matrices élémentaires permettent d'exprimer la matrice de passage de A à sa forme totalement ligne-échelonnée A'.

> ✍
>
> Précisément, la matrice inversible Q de $\mathscr{M}_4(\mathbb{K})$ telle que $QA = A'$ est donnée par
>
> $$Q = Q_{10}Q_9Q_8Q_7Q_6Q_5Q_4Q_3Q_2Q_1,$$
>
> où les matrices élémentires Q_j sont définies dans le tableau 1 ci-dessous.

Tableau 1 – Opérations et matrices élémentaires

Numéro	Opération élémentaire	Matrice élémentaire	Écriture explicite
1.	$L_4 \leftarrow L_4 - L_3$	$Q_1 = T_{4,3}^{(4)}(-1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
2.	$L_4 \leftarrow L_4 - L_2$	$Q_2 = T_{4,2}^{(4)}(-1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
3.	$L_3 \leftarrow L_3 - aL_1$	$Q_3 = T_{3,1}^{(4)}(-a)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
4.	$L_3 \leftarrow L_3 + 2aL_2$	$Q_4 = T_{3,2}^{(4)}(2a)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
5.	$L_3 \leftrightarrow L_4$	$Q_5 = P_{3,4}^{(4)}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
6.	$L_4 \leftarrow L_4 + 2aL_3$	$Q_6 = T_{4,3}^{(4)}(2a)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2a & 1 \end{bmatrix}$
7.	$L_3 \leftarrow -\frac{1}{a}L_3$	$Q_7 = D_3(-1/a)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
8.	$L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3$	$Q_8 = T_{1,3}^{(4)}(-4)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
9.	$L_2 \leftarrow L_2 - aL_3$	$Q_9 = T_{2,3}^{(4)}(-a)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
10.	$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$	$Q_{10} = T_{1,2}^{(4)}(-2)$	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$