Un exercice sur la structure des semi-groupes à gauche

Partie 1 – Puissances entières d'un élément et simplification à gauche dans les magmas associatifs

(1) Étant donné un ensemble E muni d'une loi associative, notée multiplicativement, soit x un élément de E et soit A l'ensemble des x^n, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Démontrez les quatre propositions suivantes.

(a) Si l'ensemble A est infini, alors il est isomorphe (pour la loi induite par la loi donnée sur E) à $\mathbb{N}^*$ muni de l'addition.

(b) Si la loi sur E a un élément neutre, et si l'ensemble B des x^n, où $n \in \mathbb{N}$, est infini, alors B est isomorphe (pour la loi induite par la loi donnée sur E) à $\mathbb{N}$ muni de l'addition.

(c) Si la loi sur E a un élément neutre, si l'élément x est inversible, et si l'ensemble C des x^a, où $a \in \mathbb{Z}$, est infini, alors C est isomorphe (pour la loi induite par la loi donnée sur E) à $\mathbb{Z}$ muni de l'addition.

(d) Si l'ensemble A est fini, alors il contient un idempotent h et un seul ; le cas échéant, si $h = x^p$, l'ensemble D des x^n pour $n \geqslant p$ est une partie stable de E telle que D soit un groupe pour la loi induite sur D.

[*Indication* : Pour prouver l'unicité de l'idempotent, observez que, si x^p et x^q sont des idempotents, alors $x^p = x^{pq}$ et $x^q = x^{pq}$.]

(2) Étant donné un ensemble E muni d'une loi associative, notée multiplicativement, soit a un élément de E simplifiable à gauche.

Prouvez les deux propositions suivantes.

(a) S'il existe un élément u de E tel que $au = a$, alors $ux = x$ pour tout $x \in E$; en particulier, si $xu = x$ pour tout $x \in E$, alors u est élément neutre.

(b) S'il existe un élément u de E tel que $au = a$ et un élément b de E tel que $ab = u$, alors $ba = u$; en particulier, s'il existe un élément neutre e, et un élément b tel que $ab = e$, alors b est inverse de a.

[*Indication* : Formez aba.]

Partie 2 – Semi-groupes à gauche

Soit E un **semi-groupe à gauche** de loi notée multiplicativement, c'est-à-dire un ensemble E, muni d'une loi de composition *associative*, notée multiplicativement, telle que tout élément de E soit *simplifiable à gauche*.

Démontrez chacune des propositions suivantes.

(1) Si u est un élément idempotent de E, alors $ux = x$ pour tout $x \in E$ et u est élément neutre pour la loi induite sur Eu.

[*Indication* : Utilisez la proposition **(2.a)** de la Partie 1.]

(2) Si u et v sont deux idempotents distincts de E, alors $Eu \cap Ev = \emptyset$, et les ensembles Eu et Ev (munis des lois induites par celle de E) sont isomorphes.

(3) Soit R le complémentaire de la réunion des ensembles Eu, où u parcourt l'ensemble des idempotents de E.

(a) Alors, $ER \subset R$; et donc R est une partie stable de E.

(b) Si R n'est pas vide, alors $aR \neq R$ pour tout $a \in R$, et R est infini.

[*Indication* : Utilisez la proposition **(2.a)** de la Partie 1 pour prouver que, dans le cas contraire, R contiendrait un idempotent.]

L'ensemble R est appelé le **résidu** du semi-groupe à gauche E.

(4) Si R n'est pas vide, et s'il existe au moins un idempotent u dans E (c'est-à-dire $E \neq R$), alors $xEu \neq Eu$ pour tout $x \in REu$; en particulier, aucun élément de REu n'est inversible dans Eu, et REu est un ensemble infini.

[*Indication* : Pour établir l'infinité de REu, utilisez la proposition **(1.d)** de la Partie 1.]

(5) Si E possède un élément neutre e, alors e est le seul idempotent de E, et R est vide.

[*Indication* : Remarquez que $E = Ee$.]

(6) S'il existe un élément a de E simplifiable à droite (si en particulier la loi donnée sur E est commutative), alors, soit E possède un élément neutre, soit $E = R$.

[*Indication* : Remarquez que, s'il existe un idempotent u, alors $xa = xua$ pour tout $x \in E$.]

Par exemple, si E est l'ensemble des entiers naturels non nuls, muni de l'addition, alors E est un semi-groupe commutatif tel que $E = R$.

(7) S'il existe un élément a de E tel que la translation à droite δ_a, définie de E dans E par $\delta_a(x) = xa$, alors, soit E possède un élément neutre, soit $E = R$.

[*Indication* : Examinez séparément le cas où $a \in R$ et le cas où $a \in Eu$ pour un idempotent u.]