La structure des semi-groupes à gauche

Christian V. Nguembou Tagne

28 août 2021

Un **semi-groupe à gauche** est un ensemble, muni d'une loi *associative*, telle que tout élément soit *simplifiable à gauche*.

L'objectif principal de cet article, divisé en deux sections, est l'étude de la structure des semi-groupes à gauche. Cette étude est réalisée dans la seconde section de l'article. Au préalable, dans la première section, nous examinons des traits de l'ensemble des puissances entières d'un élément dans un magma associatif, ainsi que des conséquences de l'existence d'un élément simplifiable dans un magma associatif.

1. Quelques résultats préliminaires

1.1. Puissances entières d'un élément dans un magma associatif

Dans cette sous-section, considérant un magma associatif dont la loi est notée multiplicativement, nous allons établir certaines propriétés de l'ensemble des puissances d'un élément donné. Il s'agit ici de réflexions sur les exercices 7 et 8 de la section §2 du **Chapitre I** du volume d'**Algèbre** des **Éléments de Mathématiques** de Nicolas Bourbaki [1].

Proposition 1.

Soit E un magma *associatif* dont la loi est notée multiplicativement. De plus, soit x un élément de E et A l'ensemble des x^n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Si l'ensemble A est infini, alors il isomorphe (pour la loi induite par la loi donnée sur E) à $\mathbb{N}^*$ muni de l'addition.

Démonstration :

L'application ψ de $\mathbb{N}^*$ dans A, définie par $\psi(n) = x^n$, est manifestement surjective. Par ailleurs, pour tout couple (m, n) d'entiers naturels non nuls, nous avons

$$\psi(m+n) = x^{m+n} = x^m x^n = \psi(m)\psi(n).$$

L'application ψ est donc un homomorphisme surjectif de $\mathbb{N}^*$ (muni de l'addition) sur A (pour la loi induite par la loi donnée sur E).

Maintenant, soit l'ensemble A infini. Nous supposons que l'application ψ n'est pas injective. Alors, il existe des entiers naturels non nuls p et q tels que $p < q$ et $\psi(p) = \psi(q)$, c'est-à-dire $x^p = x^q$. Nous posons $d = q - p$. Alors,

$$x^p x^d = x^{p+d} = x^{p+(q-p)} = x^q = x^p \qquad \text{et} \qquad x^{p+(a+1)d} = x^{(p+ad)+d} = x^{p+ad}x^d.$$

À ce compte-là, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, nous obtenons par induction

$$x^{p+ad} = x^p.$$

Nous considérons à présent un entier naturel $n > q$. Alors, $n-p > d$ et la division euclidienne de $n-p$ par d livre un $a \in \mathbb{N}^*$ et un $b \in \mathbb{N}$ vérifiant $0 \leq b < d$ et $n - p = ad + b$. Ainsi,

$$x^n = x^{p+ad} = x^p \qquad \text{ou} \qquad x^n = x^{p+ad}x^b = x^{p+b}.$$

Cependant, $p + b < p + d = p + q - p = q$. De ce fait, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier naturel m tel que $1 \leq m \leq q$ et $x^n = x^m$. Ceci induit $A = \left\{x^1, \ldots, x^q\right\}$. Ainsi, l'ensemble A est fini : une contradiction de l'hypothèse. La supposition de la non injectivité de ψ est donc fausse. Autrement dit, l'homomorphisme surjectif ψ est un isomorphisme. $\square$

Proposition 2.

Soit E un *monoïde* dont la loi est notée multiplicativement. De plus, soit x un élément de E et B l'ensemble des x^n pour $n \in \mathbb{N}$. Si l'ensemble B est infini, alors il isomorphe (pour la loi induite par la loi donnée sur E) à $\mathbb{N}$ muni de l'addition.

Démonstration :

L'application de $\mathbb{N}$ dans B, définie par $\varphi(n) = x^n$, est un homomorphisme surjectif. Soit l'ensemble B infini. Nous supposons que φ n'est pas une injection. Alors, il existe des entiers naturels p et q tels que $p < q$ et $x^p = x^q$. En posant, $d = q - p$, nous obtenons donc

$$x^{p+d} = x^{p+(q-p)} = x^q = x^p,$$

et par conséquent $x^{p+ad} = x^p$ pour tout $a \in \mathbb{N}$. Par ailleurs, pour tout entier naturel $n > p$, il existe un couple (a, b) d'entiers naturels tels que $0 \leq b < d$ et $n - p = ad + b$. D'où

$$x^n = x^{(p+ad)+b} = x^{p+ad}x^b = x^p x^b = x^{p+b}.$$

Cependant, $p + b < p + d = q$. D'où $B = \left\{x^0, x^1, \ldots, x^q\right\}$. L'ensemble B est de ce fait fini : une contradiction de l'hypothèse. La supposition est donc fausse. En d'autres termes, φ est une injection. Par conséquent, φ est un isomorphisme. $\square$

Proposition 3.

Soit E un *monoïde* dont la loi est notée multiplicativement. De plus, soit x un élément *inversible* de E et C l'ensemble des x^a pour $a \in \mathbb{Z}$. Si l'ensemble C est infini, alors il isomorphe (pour la loi induite par la loi donnée sur E) à $\mathbb{Z}$ muni de l'addition.

Démonstration :

L'application γ de $\mathbb{Z}$ dans C, définie par $\gamma(a) = x^a$, est clairement un homomorphisme surjectif. D'après la démonstration de la proposition 2, sa restiction à $\mathbb{N}$ est une injection. Donc, si a et b sont des entiers naturels vérifiant $\gamma(a) = \gamma(b)$, alors $a = b$. Par ailleurs, si a et b sont des éléments de $-\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers négatifs ou nuls, satisfaisant $x^a = x^b$, alors $(x^a)^{-1} = (x^b)^{-1}$, c'est-à-dire $x^{-a} = x^{-b}$; d'où $-a = -b$, et donc $a = b$. De ce fait, la restriction de γ à $-\mathbb{N}$ est également une injection. Maintenant, soient des entiers $a \in -\mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $x^a = x^b$. Alors,

$$x^0 = x^{a-a} = x^a x^{-a} = x^b x^{-a} = x^{b-a}.$$

Puisque $b - a \in \mathbb{N}$, il en résulte que $0 = b - a$, c'est-à-dire $a = b$: ceci est impossible, car $(-\mathbb{N}^*) \cap \mathbb{N}^* = \emptyset$. De ce fait, pour chaque couple (a, b) d'éléments de $\mathbb{Z}$, si $\gamma(a) = \gamma(b)$, alors $(a, b) \in (-\mathbb{N})^2$ ou $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, et donc $a = b$. Ainsi, γ est une injection. Par conséquent, γ est un isomorphisme. $\square$

Maintenant, nous revenons sur l'ensemble A de la proposition 1 pour examiner le cas où il est fini.

Proposition 4.

Soit E un magma *associatif* dont la loi est notée multiplicativement, et x un élément de E. De plus, soit l'ensemble A, des x^n pour $n \in \mathbb{N}^*$, fini. Alors, A contient un élément idempotent h et un seul. Du reste, si $h = x^p$, alors l'ensemble D des x^n pour $n \geq p$ est une partie stable de E et D est un groupe pour la loi induite.

Démonstration :

Existence d'un idempotent. L'application ψ de $\mathbb{N}^*$ dans A, définie par $\psi(n) = x^n$, n'est pas injective. Autrement, elle serait bijective et l'ensemble A serait par conséquent infini : une contradiction de l'hypothèse. Il existe donc des entiers naturels non nuls a et b tels que $a < b$ et $x^a = x^b$. En posant, $d = b - a$, nous obtenons alors $x^{a+d} = x^a$, puis par induction

$$x^{a+nd} = x^a$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe des entiers naturels m et r tels que $0 \leq r < d$ et $a = md + r$. Si $r = 0$, alors $m \in \mathbb{N}^*$ et

$$(x^a)^2 = x^a x^a = x^{a+a} = x^{a+md} = x^a.$$

Si en revanche $0 < r$ et si nous posons $p = a + d - r$, alors

$$(x^p)^2 = x^p x^p = x^{p+p} = x^{a+d-r+(m+1)d} = x^{a+(m+1)d+d-r} = x^{a+(m+1)d} x^{d-r} = x^a x^{d-r} = x^p.$$

Unicité de l'idempotent. En général, pour tout élément idempotent z d'un magma associatif de loi notée multiplicativement, $z^n = z$ pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$; en effet, $z^1 = z$, et si $z^n = z$, alors $z^{n+1} = z^n z = z^2 = z$. De ce fait, si p et q sont des entiers naturels non nuls tels que x^p et x^q soient des éléments idempotents de A, alors

$$x^p = (x^p)^q = x^{pq} = (x^q)^p = x^q.$$

Structure de groupe. Soit $h = x^p$ l'élément idempotent contenu dans A et D l'ensemble des x^n pour $n \geq p$. Alors, pour tout couple (m, n) d'entiers naturels non nuls tels que $m \geq p$ et $n \geq p$, nous avons $m + n \geq p$ et $x^m x^n = x^{m+n}$. Le composé de deux éléments de D appartient toujours à D. Autrement dit, D est une partie stable de E contenant h. En outre, si $n = p$, alors $hx^n = x^n h = h^2 = h = x^n$; si en revanche $n > p$, alors

$$hx^n = x^n h = x^n x^p = (x^{n-p} x^p) x^p = x^{n-p}(x^p x^p) = x^{n-p} x^p = x^n.$$

L'élément idempotent h est donc neutre pour la loi induite sur D. Maintenant, soit $u \in D$. Alors, il existe un entier $n \geq p$ tel que $u = x^n$. De plus, il existe un couple $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ tel que $0 \leq b < p$ et $n = ap + b$. Ainsi, $v = x^{2p-b}$ est un élément de D. Du reste,

$$vu = uv = x^{ap+b} x^{2p-b} = x^{(a+2)p} = (x^p)^{a+2} = h^{a+2} = h.$$

Tout élément de D est donc inversible pour la loi induite. Munie de cette dernière, la partie D est par conséquent un groupe *abélien* pour la loi induite. $\square$

1.2. Magmas associatifs possédant un élément simplifiable à gauche

Cette sous-section révèle deux conséquences de l'existence d'un élément simplifiable à gauche dans un magma associatif.

Les deux propositions démontrées ici sont en réalité des réponses aux questions posées par l'exercices 9 de la section §2 du **Chapitre I** du volume d'**Algèbre** des **Éléments de Mathématiques** de Nicolas Bourbaki [1].

Proposition 5.

Pour une loi multiplicative associative sur un ensemble E, soit a un élément simplifiable à gauche. S'il existe un élément u de E tel que $au = a$, alors $ux = x$ pour tout $x \in E$; en particulier, si de plus $xu = x$ pour tout $x \in E$, alors u est un élément neutre.

Démonstration :

Soit u un élément de E vérifiant $au = a$. Alors, pour tout $x \in E$, nous avons $(au)x = ax$. En vertu de l'associativité de la loi, il s'ensuit que $a(ux) = ax$. Ceci entraîne $ux = x$, car a est simplifiable à gauche. L'élément u est donc neutre à gauche. Si de plus $xu = x$ pour tout $x \in E$, alors, évidement, u est un élément neutre. $\square$

Sous l'hypothèse de la proposition 5 ci-dessus, la proposition 6 suivante révèle une condition suffisante d'existence d'un inverse pour un élément simplifiable à gauche.

Proposition 6.

Pour une loi multiplicative associative sur un ensemble E, soit a un élément simplifiable à gauche.

(1) S'il existe un élément u de E tel que $au = a$ et un élément b de E tel que $ab = u$, alors $ba = u$.

(2) En particulier, s'il existe un élément neutre e et un élément b de E tel que $ab = e$, alors b est inverse de a.

Démonstration :

(1) Soit u un élément de E tel que $au = a$ et b un élément de E tel que $ab = u$. Alors, $a(ba) = (ab)a = ua$. Or, d'après la proposition 5, nous avons $ua = a$. De ce fait, $a(ba) = a = au$. Puisque l'élément a est simplifiable à gauche, il en résulte que $ba = u$.

(2) Soit e un élément neutre de E et b un élément de E tel que $ab = e$. Alors, $ae = a$. Selon **(1)**, il en découle que $ba = e$. L'élément b est donc inverse de a. $\square$

2. Semi-groupes à gauche

Cette section est dédiée à l'étude des *semi-groupes à gauche*. Elle est constituée de sept sous-sections, et a pour trame de fond l'exercice 11 de la section §2 du **Chapitre I** du volume d'**Algèbre** des **Éléments de Mathématiques** de Nicolas Bourbaki [1]. Chacune des sous-sections correspond à une des sept questions de l'exercice et se penche sur un trait marquant des semi-groupes à gauche.

Définition 1.

Un **semi-groupe à gauche** est un ensemble muni d'une loi *associative* telle que tout élément de E soit *simplifiable à gauche*.

2.1. Neutralité d'un idempotent pour une loi induite

Dans les semi-groupes à gauche, les éléments idempotents ont des propriétés décrites par le résultat suivant.

Proposition 7.

Soit E un semi-groupe à gauche de loi notée multiplicativement. Si u est un idempotent de E, alors $ux = x$ pour tout $x \in E$, puis Eu est stable pour la loi de E, et u est neutre pour la loi induite sur Eu.

Démonstration :

Soit u un idempotent de E. Alors, $u^2 = u$. Donc, en posant $a = u$, nous obtenons alors $au = a$. D'après la proposition 5 à la page 4, il en résulte que $ux = x$ pour tout $x \in E$. Maintenant, soient x et x' des éléments de E. Alors, $(xu)(x'u) = x(ux')u = (xx')u$. Ceci signifie que $(Eu)(Eu) \subset Eu$. Autrement dit, Eu est une partie stable de E. Par ailleurs, $uy = y$ pour chaque élément y de Eu. De plus, il existe un $x \in E$ tel que $y = xu$. D'où $yu = (xu)u = x(u^2) = xu = y$. De ce fait, u est neutre pour la loi induite sur Eu. □

2.2. Image de la translation à droite par un idempotent

La translation à droite par un élément de a de E est l'application δ_a définie de E dans E par $\delta_a(x) = xa$. Les images des translations à droite par des idempotents ont des traits marquants qu'il sied d'examiner.

Proposition 8.

Soit E un semi-groupe à gauche de loi notée multiplicativement. Si u et v sont deux idempotents distincts de E, alors $Eu \cap Ev = \emptyset$, puis les ensembles Eu et Ev (munis des lois induites par celle de E) sont isomorphes.

Démonstration :

Soient u et v deux idempotents distincts de E. Nous supposons que $Eu \cap Ev \neq \emptyset$. Alors, il existe deux éléments a et b de E tels que $au = bv$. Ceci induit

$$au = b(v^2) = (bv)v = (au)v = a(uv).$$

Puisque tout élément de E est simplifiable à gauche, il en résulte que $u = uv$. Cependant, d'après la proposition 7 précédente, $ux = x$ pour tout $x \in E$. En particulier, $uv = v$. D'où $u = v$: une contradiction de l'hypothèse. La supposition $Eu \cap Ev \neq \emptyset$ est donc fausse. Autrement dit, $Eu \cap Ev = \emptyset$.

Maintenant, soient x et y des éléments de E vérifiant $xu = yu$. Alors,

$$xv = x(uv) = (xu)v = (yv)v = y(v^2) = yv.$$

Ainsi, la correspondance $\varphi(xu) = xv$ définit une application φ de Eu dans Ev. Cette application φ est manifestement surjective. En outre, si x et y sont des éléments de E tels que $\varphi(xu) = \varphi(yu)$, c'est-à-dire $xv = yv$, alors

$$xu = x(vu) = (xv)u = (yv)u = y(vu) = yu;$$

car $va = a$ pour tout $a \in E$, au regard de la proposition 7, et donc $vu = u$. Ceci signifie que l'application φ est injective. En outre, pour tout couple (x, y) d'éléments de E, nous avons

$$\varphi\Big((xu)(yu)\Big) = \varphi\Big(x(uy)u\Big) = \varphi\Big((xy)u\Big) = (xy)v = x(vy)v = (xv)(yv) = \varphi(xu)\varphi(yv).$$

Par conséquent, φ est un isomorphisme de Eu sur Ev. □

2.3. Résidu d'un semi-groupe à gauche

Cette section introduit un des concepts centraux de la théorie de la structure des semi-groupes à gauche.

Définition 2.

Le **résidu** du semi-groupe à gauche E est le complémentaire de la réunion des ensembles Eu, où u parcourt l'ensemble des idempotents de E.

Nous démontrons d'entrée de jeu que le résidu d'un semi-groupe à gauche est un idéal à droite, et a fortiori une partie stable.

Proposition 9.

Soit E un semi-groupe à gauche de loi notée multiplicativement, et soit R le résidu de E. Alors, $ER \subset R$, et donc R est une partie stable de E.

Démonstration :

Soit $a \in E$ et $r \in R$. Nous supposons qu'il existe un idempotent u de E satisfaisant $ar \in Eu$. Alors, $ar = bu$ pour un élément b de E. Au demeurant, $bu = b(u^2) = (bu)u$. D'où $ar = (ar)u$, c'est-à-dire $ar = a(ru)$. Puisque tout élément de E est simplifiable à gauche, il s'ensuit $r = ru$. De ce fait, $r \in Eu$. Ceci est contradictoire, car $R \subset E \setminus Eu$. La supposition est donc fausse. En d'autres termes, $ar \in R$ pour tout $a \in E$ et chaque $r \in R$. Ceci signifie que $ER \subset R$. Ainsi, $RR \subset ER \subset R$. Le résidu R est donc une partie stable de E. $\square$

D'autres traits marquants des résidus des semi-groupes à gauche méritent d'être évoqués ici. Tel est le dessein du résultat suivant.

Proposition 10.

Soit E un semi-groupe à gauche de loi notée multiplicativement, et soit R le résidu de E. Si R n'est pas vide, alors $aR \neq R$ pour tout $a \in R$, et R est un ensemble infini.

Démonstration :

Soit $R \neq \emptyset$ et $a \in R$. Nous supposons que $aR = R$. Alors, il existe un élément u de R tel que $au = a$. En vertu de la proposition 5 à la page 4, il en découle que $ux = x$ pour tout $x \in E$. En particulier, $u^2 = u$. Donc, u est un idempotent. En outre, $Eu \subset ER \subset R$: une contradiction (par définition, R est le complémentaire de la réunion des Eu, où u parcourt l'ensemble des idempotents de E). La supposition $aR = R$ est donc fausse. D'où $aR \neq R$ pour chaque $a \in R$.

Soit $R \neq \emptyset$ et $x \in R$. Alors, l'ensemble A des puissances x^n, où $n \in \mathbb{N}^*$, est une partie de R, car R est une partie stable de E. Puisque le résidu R ne contient pas d'idempotent, il en est de même pour A. Eu égard à la proposition 4 à la page 3, il en découle que l'ensemble A est infini. Par conséquent, le résidu R, contenant A, est un ensemble infini. $\square$

2.4. Résidu et image d'une translation à droite par un idempotent

Un semi-groupe à gauche, de résidu non vide et non réduit à son résidu, est la réunion dudit résidu et de monoïdes deux-à-deux disjoints. La proposition 11 suivante révèle des traits de ces monoïdes ; elle montre entre autres que ces monoïdes ne sont pas des groupes.

Proposition 11.

Soit E un semi-groupe à gauche de loi notée multiplicativement. Nous supposons que le résidu R de E n'est pas vide, et qu'il existe au moins un idempotent u dans E (c'est-à-dire si $E \neq R$). Alors, $xEu \neq Eu$ pour tout $x \in REu$. En particulier, aucun élément de REu n'est inversible dans Eu. De plus, REu est un ensemble infini.

Démonstration :

Soit $R \neq \emptyset$ et soit u un idempotent de E. Nous supposons qu'il existe un $x \in REu$ tel que $xEu = Eu$. Alors, il existe un $z \in Eu$ tel que $u = xz$. Cependant, l'appartenance de x à REu signifie l'existence d'un $a \in R$ et d'un $y \in Eu$ tel que $x = ay$. D'où $u = ayz$.

Maintenant, soit $r \in R$. D'après la proposition 7, nous avons $ux = x$ pour tout $x \in E$. En particulier, $r = ur$. Ceci entraîne $r = ayzr \in aER$. Or, $ER \subset R$, selon la proposition 9. De ce fait, $r \in aR$ pour tout $r \in R$. Autrement dit, $R \subset aR$. Puisque $aR \subset RR \subset R$, il en résulte que $aR = R$: une contradiction de la proposition 10. La supposition est donc fausse. En d'autres termes, $xEu \neq Eu$ pour chaque $x \in REu$.

En réalité, dans les deux paragraphes précédents, nous avons montré que $u \notin xEu$, quel que soit $x \in REu$. Ceci signifie que, pour tout $x \in REu$, il n'existe pas de $y \in Eu$ tel que $xy = u$. De ce fait, aucun élément de REu n'est inversible dans Eu.

Puisque le résidu R de E est non vide, il en est de même pour l'ensemble REu. De plus, ce dernier est une partie stable de E ; en effet,

$$(REu)(REu) \subset R(EuR)Eu \subset R(ER)Eu \subset (RR)Eu \subset REu.$$

Soit $x \in REu$ et A l'ensemble des x^n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, $A \subset REu$, compte tenu de la stabilité de REu. À présent, nous supposons que l'ensemble REu est fini. Alors, il en est de même pour sa partie A. D'après la proposition 4 à la page 3, ceci entraîne l'existence d'un idempotent v dans A. Dans la mesure où $A \subset REu \subset Eu$ et u est l'unique idempotent contenu dans Eu, il s'ensuit que $u = v$, et donc $u \in REu$: une contradiction du fait qu'aucun élément de REu n'est inversible dans Eu. La supposition est donc fausse. Autrement dit, l'ensemble REu est infini. □

2.5. Semi-groupes à gauche ayant un élément neutre

Dans cette section, nous dévoilons la nature du résidu des semi-groupes à gauche possédant un élément neutre.

Proposition 12.

Soit E un semi-groupe à gauche de loi notée multiplicativement. Si E possède un élément neutre e, alors e est le seul idempotent de E et le résidu R de E est vide.

Démonstration :

Soit e un élément neutre de E. Alors, $Ee = E$. Nous supposons qu'il existe un idempotent u de E distinct de e. Alors, $Eu \cap Ee = \emptyset$, d'après la proposition 8 à la page 6. Cependant, $Eu \subset E = Ee$. D'où $Eu \cap Ee = Eu$, et donc $Eu = \emptyset$: une contradiction, car $u \in Eu$. Par conséquent, e est le seul idempotent de E. Du reste, puisque e est le seul idempotent de E, le résidu de E est $R = E \setminus Ee = E \setminus E = \emptyset$. □

2.6. Semi-groupes à gauche ayant un élément simplifiable à droite

Les semi-groupes à gauche ayant un élément simplifiable à droite ont une structure triviale qu'il convient de mentionner ici.

Proposition 13.

Soit E un semi-groupe à gauche de loi notée multiplicativement. S'il existe un élément a de E simplifiable à droite (en particulier si la loi donnée sur E est commutative), alors, soit E possède un élément neutre, soit E est égal à son résidu R.

Démonstration :

Soit a un élément de E simplifiable à droite. Nous supposons tout d'abord qu'il existe un idempotent u dans E. Alors, $ux = x$ pour tout $x \in E$, en vertu de la proposition 7 à la page 5. En particulier, $ua = a$. D'où $(xu)a = x(ua) = xa$. Puisque a est simplifiable à droite, il en résulte que $xu = x$. Ainsi, l'idempotent u est l'élément neutre pour la loi de E. Maintenant, nous supposons qu'il n'y a aucun idempotent dans E. Alors, par définition, $R = E$.

En particulier, si la loi sur E est commutative, alors tout élément de E est simplifiable à gauche et à droite ; d'après ce qui précède, il en résulte que E possède un élément neutre ou $E = R$. □

Découvrons à présent un semi-groupe à gauche égal à son résidu.

✍ **Exemple.**

Soit E l'ensemble des entiers naturels non nuls, muni de l'addition. Alors, de toute évidence, tout élément de E est simplifiable à gauche et la loi donnée sur E est commutative. Puisqu'aucun élément de E n'est neutre pour l'addition, il en résulte que E est égal à son résidu R. Donc, E est un semi-groupe commutatif égal à son résidu.

2.7. Semi-groupes à gauche ayant une translation à droite surjective

Quelle sont les conséquences structurelles de l'existence d'une translation à droite surjective dans un semi-groupe à gauche ? Le résultat suivant répond à cette question.

Proposition 14.

Soit E un semi-groupe à gauche de loi notée multiplicativement. S'il existe un élément a de E tel que la translation à droite δ_a, définie de E dans E par $\delta_a(x) = xa$, soit surjective, alors, soit E possède un élément neutre, soit E est égal à son résidu R.

Démonstration :

Soit a un élément de E tel que la translation à droite δ_a soit surjective.

Premier cas. Soit $a \in R$. Nous supposons qu'il existe un idempotent u dans E. Alors, par définition, $R \subset E \setminus Eu$. Du reste, en raison de la surjectivité de la translation à droite δ_a, il existe un $x \in E$ tel que $u = xa$. D'où $u \in ER \subset R$. Ceci contredit $R \subset E \setminus Eu$. De ce fait, E ne contient pas d'idempotent. Ainsi, $E = R$.

Second cas. Il existe un idempotent $u \in E$ tel que $a \in Eu$. Alors, $ux = x$ pour tout $x \in E$, d'après la proposition 7. Au demeurant, il existe un élément b de E tel que $a = bu$. Soit $x \in E$. En vertu de la surjectivité de δ_a, il existe un $y \in E$ tel que $x = ya$. D'où $x = ybu$. De ce fait, $xu = ybu^2 = ybu = x$. Par conséquent, $ux = ux = x$ pour tout $x \in E$. Ceci signifie que l'élément u est neutre pour la loi de E.

Par conséquent, soit E possède un élément neutre, soit E est égal à son résidu R. □

Références

[1] N. Bourbaki, **Algèbre : Chapitres 1 à 3**, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007.