Le problème d'adhérence-complémentaire de Kuratowski

Christian V. Nguembou Tagne

12 août 2021

L'objectif ultime de cet article, divisé en deux sections, est de démontrer un théorème introduit en 1922 par le mathématicien polonais Kazimierz Kuratowski. Cet objectif sera réalisé dans la deuxième section de l'article, après que le sous-bassement algébrique de notre argumentation ait été exposé dans la première section.

1. Le monoïde de Kuratowski

Un **magma** est un ensemble M muni d'une loi de composition

$$M \times M \to M, (x, y) \mapsto xy.$$

Le composé d'une séquence finie $(x_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ d'éléments de M, où n est un entier naturel non nul, est défini comme suit :

— si $n = 1$, alors $\prod_{j=1}^{n} x_j = x_1$;

— si $n \geqslant 2$, alors $\prod_{j=1}^{n} x_j = x_1 \left(\prod_{j=2}^{n} x_j \right)$.

En particulier, la **puissance n-ième** d'un élément x de M est définie par

$$x^1 = x \qquad \text{et} \qquad x^n = x\left(x^{n-1}\right)$$

pour $n \geqslant 2$. En outre, si le magma M a un élément neutre e, nous définissons $x^0 = e$ pour chaque élément x de X ; nous posons également que le composé de toute suite vide est égal à l'élément neutre e ; en d'autres termes, $\prod_{j \in \emptyset} x_j = e$.

1.1. Partie stable engendrée par un sous-ensemble d'un magma

Nous rappelons qu'une partie A d'un magma est dite **stable** si $AA \subset A$, c'est-à-dire si $xy \in A$ pour tout couple $(x, y) \in A \times A$.

De toute évidence, l'intersection de toute famille de parties stables d'un magma M est également une partie stable de M. De ce fait, pour toute partie S de M, il existe une *plus petite* partie stable contenant S, appelée **partie stable de M engendrée par S**.

Proposition 1.

Soit M un magma *associatif* et S un sous-ensemble de M. Alors, tout élément de la partie stable de M engendrée par S a la forme $x_1x_2\cdots x_n$, où n est un entier naturel non nul, et les x_1, x_2, …, x_n sont des éléments de S.

Démonstration :

Soit S' l'ensemble des éléments de la forme $x_1x_2\cdots x_n$, où n est un entier naturel non nul, et les x_1, x_2, …, x_n sont des éléments de S. Alors, par induction sur n, nous montrons facilement que tout élément de S' appartient à chaque partie stable de M contenant S. En outre, S' contient S et est stable pour la loi de M. En effet, si u et v sont des éléments de S', alors il existe des entiers naturels non nuls n et p, ainsi que des éléments x_1, …, x_n, x_{n+1}, …, x_{n+p} de S tels que $u = x_1\cdots x_n$ et $v = x_{n+1}\cdots x_{n+p}$; et donc

$$uv = (x_1\cdots x_n)(x_{n+1}\cdots x_{n+p}) = x_1\cdots x_{n+p} \in S',$$

compte tenu de l'associativité de la loi de M. Par conséquent, S' est la plus petite partie stable de M contenant S, c'est-à-dire la partie stable de M engendrée par S. $\square$

1.2. Le sous-monoïde engendré par un sous-ensemble

Nous rappelons qu'un **monoïde** est un magma associatif possédant un élément neutre.

Une partie d'un monoïde M est appelé **sous-monoïde** si elle contient l'élément neutre de M et est stable pour la loi de M. Le **sous-monoïde engendré** par une partie S de M est le plus petit sous-monoïde contenant S.

Proposition 2.

Soit M un monoïde et e son élément neutre. Alors, tout élément du sous-monoïde engendré par une partie S de M est un composé fini de puissances d'éléments de S, c'est-à-dire le composé d'une suite vide ou un élément de la forme

$$\prod_{j=1}^{k} x_j^{n_j} = x_1^{n_1}\cdots x_k^{n_k},$$

où k est un entier naturel non nul, les n_j sont des entiers naturels, et les x_j sont des éléments de S. En particulier, le sous-monoïde de M engendré par l'ensemble vide est le singleton $\{e\}$.

Démonstration :

Soit S' l'ensemble des composés finis de puissances d'éléments de S. Alors, en raisonnant par induction sur le nombre de composantes du composé fini, nous obtenons que tout élément de S' appartient à chaque sous-monoïde de M contenant S. Ceci signifie que S' est inclus dans n'importe quel sous-monoïde de M contenant S. Du reste, l'élément neutre e appartient à S', car il est égal au composé de toute suite vide ou égal à x^0 pour tout $x \in M$. Au demeurant, si u et v sont des éléments de S' tels que

$$u = \prod_{j=1}^{k} x_j^{n_j} = x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k} \qquad \text{and} \qquad v = \prod_{j=k+1}^{k+\ell} x_j^{n_j} = x_{k+1}^{n_{k+1}} \cdots x_{k+\ell}^{n_{k+\ell}},$$

où k et ℓ sont des entiers naturels non nuls, les n_j sont des entiers naturels, et les x_j sont des éléments de S, alors, en raison de l'associativité de la loi de M, nous obtenons

$$uv = \left(x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k}\right)\left(x_{k+1}^{n_{k+1}} \cdots x_{k+\ell}^{n_{k+\ell}}\right) = \prod_{j=1}^{k+\ell} x_j^{n_j} \in S'.$$

Il en résulte que S' est la plus petite partie stable de M contenant l'élément neutre e et S. De ce fait, S' est le sous-monoïde de M engendré par S. À l'évidence, si $S = \emptyset$, alors le seul élément de S' est le composé d'une suite vide, c'est-à-dire l'élément neutre e. $\square$

1.3. Un monoïde ayant au plus sept éléments

Dans un magma dont la loi est notée multiplicativement, un élément x est appelé **élément idempotent** (ou simplement un **idempotent**) si $x^2 = x$. Le cas échéant, $x^n = x$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Ce fait s'établit facilement par induction sur n.

Le résultat suivant propose une description pratique des éléments du sous-monoïde engendré par une paire d'idempotents distincts.

Proposition 3.

Soit M un monoïde et e son élément neutre. Par ailleurs, soient i et c deux *éléments idempotents* distincts de M, tous les deux différents de e. Alors, tout élément du sous-monoïde de M engendré par i et c appartient à $\{e, i, c\}$ ou est de la forme

$$\prod_{j=1}^{n} x_j = x_1 x_2 \cdots x_n,$$

où n est un entier vérifiant $n \geqslant 2$, et chaque x_j appartient à $\{i, c\}$ avec $x_j \neq x_{j+1}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n-2\}$. Par conséquent, les éléments du sous-monoïde de M engendré par les éléments i et c sont exactement les termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies respectivement par

$$\begin{cases} u_0 = e, \\ u_{n+1} = u_n i \quad \text{si } n \text{ est pair}, \\ u_n = u_{n-1} c \quad \text{si } n \text{ est non nul et pair}, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} v_0 = e, \\ v_{n+1} = v_n c \ \text{ si } n \text{ est pair}, \\ v_n = v_{n-1} i \ \text{ si } n \text{ est non nul et pair.} \end{cases}$$

Démonstration :

D'après la proposition 2, tout élément du sous-monoïde de M engendré par i et c a la forme

$$x = \prod_{j=1}^{k} a_j^{m_j} = a_1^{m_1} \cdots a_k^{m_k}, \tag{†}$$

où k est un entier naturel non nul, les m_j sont des entiers naturels, et les a_j sont des éléments de la paire $\{i, c\}$. Ainsi, pour établir la première affirmation de la proposition 3, il suffit de montrer la véracité de la propriété $(\mathbf{P})$ suivante : si x a la forme (†) et n'appartient pas à $\{e, i, c\}$, alors il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que

$$x = \prod_{j=1}^{n} x_j = x_1 x_2 \cdots x_n,$$

où chaque x_j appartient à $\{i, c\}$ avec $x_j \neq x_{j+1}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. Nous allons le faire par induction sur k.

Nous soulignons tout d'abord que, si x a la forme (†) et n'appartient pas à $\{e, i, c\}$, alors $k \geqslant 2$; le contraire induirait en effet

$$x = a_1^{m_1} = \begin{cases} e & \text{si} \quad m_1 = 0, \\ i & \text{si} \quad m_1 \geqslant 1 \quad \text{et} \quad a_1 = i, \\ c & \text{si} \quad m_1 \geqslant 1 \quad \text{et} \quad a_1 = c. \end{cases}$$

Maintenant, soit x un élément de M n'appartenant pas à $\{e, i, c\}$ et ayant la forme (†) avec $k = 2$, c'est-à-dire $x = a_1^{m_1} a_2^{m_2}$. Alors, $m_1 \geqslant 1$ et $m_2 \geqslant 1$, puis $a_1 \neq a_2$; autrement, nous aurions $x \in \{e, i, c\}$. Puisque $i^m = i$ et $c^m = c$ pour tout entier $m \geqslant 1$, il en résulte que $x = a_1 a_2$. La propriété $(\mathbf{P})$ est donc vraie pour $k = 2$.

À présent, nous supposons que la propriété $(\mathbf{P})$ est vraie pour un entier $k \geqslant 2$. Soit x un élément du monoïde M tel que $x \notin \{e, i, c\}$ et

$$x = \prod_{j=1}^{k+1} a_j^{m_j} = a_1^{m_1} \cdots a_k^{m_k} a_{k+1}^{m_{k+1}},$$

où k est un entier vérifiant $k \geqslant 2$, les m_j sont des entiers naturels, et les a_j appartiennent à la paire $\{i, c\}$. Soit $y = a_1^{m_1} \cdots a_k^{m_k}$. Alors, $y \neq e$; autrement, nous aurions $x \in \{e, i, c\}$. Si $y = i$, alors $a_{k+1} = c$ et $x = ic$. De même, si $y = c$, alors $a_{k+1} = i$ et $x = ci$. En revanche, si $y \notin \{e, i, c\}$, alors, en vertu de la supposition, il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que

$$y = \prod_{j=1}^{n} x_j = x_1 x_2 \cdots x_n,$$

où chaque x_j appartient à $\{i, c\}$ avec $x_j \neq x_{j+1}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n-1\}$; d'où

$$x = y a_{k+1}^{m_{k+1}} = \begin{cases} x_1 x_2 \cdots x_n & \text{si } a_{k+1}^{m_{k+1}} \in \{e, x_n\}, \\ x_1 x_2 \cdots x_n a_{k+1} & \text{si } a_{k+1}^{m_{k+1}} \notin \{e, x_n\}. \end{cases}$$

De ce fait, si la propriété (**P**) est vraie pour un entier $k \geqslant 2$, alors elle est également vraie pour $k+1$.

La première affirmation de la proposition 3 est ainsi établie. La seconde affirmation s'en déduit assez facilement. □

Le sous-monoïde engendré par deux idempotents distincts, tous deux différents de l'élément neutre, peut être infini (voir la proposition 3). Toutefois, si les deux compositions de ces idempotents sont également des idempotents, alors le sous-monoïde est forcément fini.

Proposition 4.

Soit M un monoïde et e son élément neutre. Par ailleurs, soient i et c deux éléments distincts de $M \backslash \{e\}$ tels que $i^2 = i$ et $c^2 = c$, puis $(ic)^2 = ic$ et $(ci)^2 = ci$. Alors, tout élément du sous-monoïde de M engendré par i et c est égal à l'un des composés suivants :

$$e, \qquad i, \qquad c, \qquad ic, \qquad ci, \qquad ici, \qquad cic.$$

Démonstration :

Soient les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies respectivement par

$$\begin{cases} u_0 = e, \\ u_{n+1} = u_n i & \text{si } n \text{ est pair}, \\ u_n = u_{n-1} c & \text{si } n \text{ est non nul et pair}, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} v_0 = e, \\ v_{n+1} = v_n c & \text{si } n \text{ est pair}, \\ v_n = v_{n-1} i & \text{si } n \text{ est non nul et pair}. \end{cases}$$

Alors,

$$u_0 = e, \qquad u_1 = i, \qquad u_2 = ic, \qquad u_3 = ici,$$

et

$$u_4 = icic = (ic)^2 = ic = u_2.$$

De ce fait, si un entier $n \geqslant 2$ est pair, alors $u_n = u_2$; et si un entier $n \geqslant 2$ est impair, alors $u_n = u_3$. Donc, tout terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égal à u_0, u_1, u_2 ou u_3. Au demeurant,

$$v_0 = e, \qquad v_1 = c, \qquad v_2 = ci, \qquad v_3 = cic,$$

et

$$v_4 = cici = (ci)^2 = ci = v_2.$$

Par conséquent, si un entier $n \geqslant 2$ est pair, alors $v_n = v_2$; et si un entier $n \geqslant 2$ est impair, alors $v_n = v_3$. Ainsi, chaque terme de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égal à v_0, v_1, v_2 ou v_3. Cependant, d'après la proposition 3, les éléments du sous-monoïde de M engendré par i et c sont exactement les termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le sous-monoïde de M engendré par i et c est donc l'ensemble $\{e, i, c, ic, ci, ici, cic\}$. □

1.4. Le monoïde de Kuratowski

Dans un monoïde, dont la loi est notée multiplicativement, et l'élément neutre désigné par e, un élément x est dit **involutif** ou appelé **involution** si $x^2 = e$, c'est-à-dire s'il est inversible et égal à son inverse.

Le résultat suivant propose une description pratique des éléments du sous-monoïde engendré par une involution et un idempotent.

Proposition 5.

Soit M un monoïde et e son élément neutre. Par ailleurs, soit d une involution différente de e et c un idempotent distinct de d et de e. Alors, tout élément du sous-monoïde de M engendré par d et c appartient à $\{e, d, c\}$ ou est de la forme

$$\prod_{j=1}^{n} x_j = x_1 x_2 \cdots x_n,$$

où n est un entier vérifiant $n \geqslant 2$, et chaque x_j appartient à $\{d, c\}$ avec $x_j \neq x_{j+1}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n-2\}$. Par conséquent, les éléments du sous-monoïde de M engendré par les éléments d et c sont exactement les termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies respectivement par

$$\begin{cases} u_0 = e, \\ u_{n+1} = u_n d \quad \text{si } n \text{ est pair}, \\ u_n = u_{n-1} c \quad \text{si } n \text{ est non nul et pair}, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} v_0 = e, \\ v_{n+1} = v_n c \quad \text{si } n \text{ est pair}, \\ v_n = v_{n-1} d \quad \text{si } n \text{ est non nul et pair}. \end{cases}$$

Démonstration :

L'argumentation utilisée dans la démonstration de la proposition 3 fonctionne également ici. La rédaction détaillée est laissée au lecteur. □

À présent, nous allons étudier un cas particulier de la proposition 5.

Proposition 6.

Soit M un monoïde et e son élément neutre. Par ailleurs, soient d et c deux éléments distincts de $M\backslash\{e\}$ tels que $d^2 = e$ et $c^2 = c$, puis $(dcdc)^2 = dcdc$. Alors, tout élément du sous-monoïde de M engendré par d et c est égal à l'un des composés suivants :

$$e, \quad d, \quad c, \quad dc, \quad cd, \quad dcd, \quad cdc, \quad dcdc, \quad cdcd, \quad dcdcd, \quad cdcdc,$$

$$dcdcdc, \quad cdcdcd, \quad dcdcdcd.$$

Démonstration :

Nous considérons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{cases} u_0 = e, \\ u_{n+1} = u_n d \ \text{ si } n \text{ est pair}, \\ u_n = u_{n-1} c \ \text{ si } n \text{ est non nul et pair}, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} v_0 = e, \\ v_{n+1} = v_n c \ \text{ si } n \text{ est pair}, \\ v_n = v_{n-1} d \ \text{ si } n \text{ est non nul et pair}. \end{cases}$$

Alors,

$$u_0 = e, \qquad u_1 = d, \qquad u_2 = dc, \qquad u_3 = dcd, \qquad u_4 = dcdc, \qquad u_5 = dcdcd,$$

$$u_6 = dcdcdc, \qquad u_7 = dcdcdcd,$$

et

$$u_8 = dcdcdcdc = (dcdc)^2 = dcdc = u_4.$$

De ce fait, pour tout entier $n \geqslant 4$, nous avons

$$u_n = \begin{cases} u_4 & \text{si } \ n \equiv 0 \,[\text{mod}\, 4], \\ u_5 & \text{si } \ n \equiv 1 \,[\text{mod}\, 4], \\ u_6 & \text{si } \ n \equiv 2 \,[\text{mod}\, 4], \\ u_7 & \text{si } \ n \equiv 3 \,[\text{mod}\, 4]. \end{cases}$$

Il en résulte que chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égal à

$$e, \qquad d, \qquad dc, \qquad dcd, \qquad dcdc, \qquad dcdcd, \qquad dcdcdc \qquad \text{ou} \qquad dcdcdcd.$$

Au demeurant,

$$v_0 = e, \qquad v_1 = c, \qquad v_2 = cd, \qquad v_3 = cdc, \qquad v_4 = cdcd, \qquad v_5 = cdcdc,$$

$$v_6 = cdcdcd,$$

et

$$v_7 = cdcdcdc = ddcdcdcdc = d(dcdc)^2 = ddcdc = cdc = v_3.$$

Donc, pour tout entier $n \geqslant 3$, nous avons

$$v_n = \begin{cases} v_3 & \text{si} \quad n \equiv 3\,[\mathrm{mod}\, 4], \\ v_4 & \text{si} \quad n \equiv 0\,[\mathrm{mod}\, 4], \\ v_5 & \text{si} \quad n \equiv 1\,[\mathrm{mod}\, 4], \\ v_6 & \text{si} \quad n \equiv 2\,[\mathrm{mod}\, 4]. \end{cases}$$

Il s'ensuit que chaque terme de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égal à

$$e, \qquad c, \qquad cd, \qquad cdc, \qquad cdcd, \qquad cdcdc, \qquad cdcdcd \qquad \text{ou} \qquad cdcdcdc.$$

Puisque les éléments du sous-monoïde de M engendré par d et c sont exactement les termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (voir la proposition 5), ceci conclut la démonstration. □

Le sous-monoïde engendré de la proposition 6 est appelé **monoïde de Kuratowski**.

2. Le Théorème d'adhérence-complémentaire de Kuratowski

En topologie générale, le *problème d'adhérence-complémentaire* se formule comme suit :

> Partant d'une partie donnée A d'un espace topologique et comptant A lui-même, combien d'ensembles peuvent-ils être construits en appliquant successivement le complémentaire et l'adhérence ?

Le mathématicien polonais Kazimierz Kuratowski a répondu à cette question dans un article publié en 1922. Il a montré qu'*au plus* 14 ensembles peuvent être ainsi construits. Dans le même article, il a exhibé sur la droite réelle une partie pour laquelle cette construction livre 14 ensembles *différents*.

Le but de cette section est de prouver ce *théorème d'adhérence-complémentaire de Kuratowski*. Au préalable, nous donnons quelques faits de la théorie élémentaire des espaces topologiques et examinons le *problème d'adhérence-intérieur*.

2.1. Intérieur de l'adhérence et adhérence de l'intérieur

En composant l'intérieur avec l'adhérence et vice-versa, nous obtenons deux nouveaux opérateurs, dont des propriétés notables sont données ci-dessous.

Proposition 7.

Soit X un espace topologique. Pour toute partie A de X, l'intérieur de l'adhérence de A, c'est-à-dire $\mathring{\overline{A}}$, est noté $\alpha(A)$; tandis que l'adhérence de l'intérieur de A, c'est-à-dire $\overline{\mathring{A}}$, est désignée par $\beta(A)$. À l'évidence, si A et B sont des parties de X telles que $A \subset B$, alors $\alpha(A) \subset \alpha(B)$ et $\beta(A) \subset \beta(B)$.

(a) Si A est une partie ouverte de X, alors $A \subset \alpha(A)$.

(b) Si A est une partie fermée de X, alors $\beta(A) \subset A$.

(c) $\alpha\big(\alpha(A)\big) = \alpha(A)$ pour toute partie A de X.

(d) $\beta\big(\beta(A)\big) = \beta(A)$ pour toute partie A de X.

Démonstration :

(a) Soit A une partie de X. Alors, selon la définition de l'adhérence, $A \subset \overline{A}$. Ceci induit $\mathring{A} \subset \mathring{\overline{A}}$. Si A est une partie ouverte, alors $A = \mathring{A}$, et donc $A \subset \mathring{\overline{A}}$, c'est-à-dire $A \subset \alpha(A)$.

(b) Soit A une partie de X. Alors, d'après la définition de l'intérieur, $\mathring{A} \subset A$. Ainsi, $\overline{\mathring{A}} \subset \overline{A}$. Si A une partie fermée, alors $\overline{A} = A$, et donc $\overline{\mathring{A}} \subset A$, c'est-à-dire $\beta(A) \subset A$.

(c) Soit A une partie de X. Alors, $\alpha(A)$ est une partie ouverte de X. D'après **(a)**, il s'ensuit $\alpha(A) \subset \alpha\big(\alpha(A)\big)$. Du reste,

$$\alpha\big(\alpha(A)\big) = \mathring{\overline{\alpha(A)}} = \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} = \overset{\circ}{\widehat{\beta\left(\overline{A}\right)}}\,.$$

En outre, en vertu de **(b)**, nous avons $\beta\left(\overline{A}\right) \subset \overline{A}$, puisque $\overline{A}$ est une partie fermée de X. De ce fait, $\alpha\big(\alpha(A)\big) \subset \mathring{\overline{A}}$, c'est-à-dire $\alpha\big(\alpha(A)\big) \subset \alpha(A)$. Par conséquent, $\alpha\big(\alpha(A)\big) = \alpha(A)$.

(d) Soit A une partie de X. Alors, selon **(b)**, nous avons $\beta\big(\beta(A)\big) \subset \beta(A)$, car $\beta(A)$ une partie fermée de X. Par ailleurs, $\mathring{A} \subset \alpha\left(\mathring{A}\right)$, d'après **(a)**. D'où

$$\beta(A) = \overline{\mathring{A}} \subset \overline{\alpha\left(\mathring{A}\right)} = \overline{\overset{\circ}{\widehat{\overline{\mathring{A}}}}} = \overline{\overset{\circ}{\widehat{\beta(A)}}} = \beta\big(\beta(A)\big).$$

De ce fait, $\beta\big(\beta(A)\big) = \beta(A)$. □

2.2. Le problème d'adhérence-intérieur

Avant d'aborder le problème d'adhérence-complémentaire, examinons ce qui se passe lorsqu'on applique successivement l'intérieur et l'adhérence à un ensemble.

Proposition 8.

Partant d'une partie donnée A d'un espace topologique X et comptant A lui-même, *au plus* sept ensembles peuvent être construits en appliquant successivement l'intérieur et l'adhérence ; notamment, les ensembles

$$A, \quad \mathring{A}, \quad \overline{A}, \quad \alpha(A), \quad \beta(A), \quad \alpha\left(\mathring{A}\right) \quad \text{and} \quad \beta\left(\overline{A}\right).$$

En outre, sur la droite réelle, c'est-à-dire l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de sa topologie naturelle, il existe une partie de laquelle sept *différents* ensembles peuvent être ainsi construits.

Démonstration :

Pour un espace topologique X, soit M l'ensemble des applications de $\mathscr{P}(X)$ (ensemble des parties de X) dans lui-même. Alors, M muni de la composition $\circ$ (notée ici multiplicativement) est un monoïde. À l'évidence, l'application identique $\mathrm{id}_{\mathscr{P}(X)}$, symbolisée ici par e, est élément neutre de M. De plus, les applications

$$i : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X),\ A \mapsto \mathring{A},$$

et

$$c : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X),\ A \mapsto \overline{A},$$

sont des éléments de M vérifiant $i^2 = i$ et $c^2 = c$. Étant donné une partie A de X, soit $\mathfrak{S}(A)$ l'ensemble constitué de l'ensemble A lui-même et de tous les ensembles obtenus en appliquant à A successivement l'intérieur et l'adhérence. Alors, les éléments de $\mathfrak{S}(A)$ sont précisément les ensembles $\varphi(A)$, où φ appartient au sous-monoïde de M engendré par les applications i et c. Au demeurant, d'après la proposition 7, nous avons

$$ic = \alpha \qquad \text{et} \qquad ci = \beta,$$

puis

$$(ic)^2 = \alpha^2 = \alpha = ic \qquad \text{et} \qquad (ci)^2 = \beta^2 = \beta = ci.$$

Le sous-monoïde de M engendré par i et c est donc l'ensemble

$$\Big\{e, i, c, ic, ci, ici, cic\Big\} = \Big\{e, i, c, \alpha, \beta, \alpha i, \beta c\Big\},$$

en vertu de la proposition 4 à la page 5. Par conséquent,

$$\mathfrak{S}(A) = \Big\{A, \mathring{A}, \overline{A}, \alpha(A), \beta(A), \alpha\Big(\mathring{A}\Big), \beta\Big(\overline{A}\Big)\Big\}.$$

En particulier, sur la droite réelle (l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de sa topologie naturelle), pour

$$A = \big([0,1] \cap \mathbb{Q}\big) \cup [2,3[\cup]3,4] \cup \{5\},$$

l'ensemble $\mathfrak{S}(A)$ a exactement sept éléments. En effet,

$$\mathring{A} =]2,3[\cup]3,4[,$$

$$\overline{A} = [0,1] \cup [2,4] \cup \{5\},$$

$$\alpha(A) = \mathring{\overline{A}} =]0,1[\cup]2,4[,$$

$$\beta(A) = \overline{\mathring{A}} = [2,4],$$

$$\alpha\big(\mathring{A}\big) = \mathring{\overline{\beta(A)}} =]2,4[,$$

$$\beta\big(\overline{A}\big) = \overline{\alpha(A)} = [0,1] \cup [2,4].$$

Le schéma 1 à la page 13 propose une représentation graphique de ces sept ensembles. $\square$

2.3. Le théorème d'adhérence-complémentaire de Kuratowski

Le **complémentaire** d'une partie A d'un espace topologique X est notoirement l'ensemble $X\backslash A$. Dans un souci de simplification, il sera noté A^*.

Théorème 1 (Kuratowski, 1922).

Partant d'une partie donnée A d'un espace topologique X et comptant A lui-même, *au plus* 14 ensembles peuvent être construits en appliquant successivement le complémentaire et l'adhérence. Du reste, sur la droite réelle, il existe une partie de laquelle 14 *différents* ensembles peuvent être ainsi construits.

Démonstration :

Pour un espace topologique X, comme dans la preuve de la proposition 8, soit M le monoïde des applications de $\mathscr{P}(X)$ dans lui-même, dont la loi est la composition $\circ$ (notée multiplicativement). Ici aussi, l'application identique $\mathrm{id}_{\mathscr{P}(X)}$ est désignée par e. Alors, les applications

$$d : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X),\ A \mapsto A^* = X\backslash A,$$

et

$$c : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X),\ A \mapsto \overline{A},$$

sont des éléments de M satisfaisant $d^2 = e$ et $c^2 = c$. Étant donné une partie A de X, soit $\mathfrak{S}(A)$ l'ensemble constitué de l'ensemble A lui-même et de tous les ensembles obtenus en appliquant à A successivement le complémentaire et l'adhérence. Alors, les éléments de $\mathfrak{S}(A)$ sont précisément les ensembles $\varphi(A)$, où φ appartient au sous-monoïde de M engendré par les applications d et c. Au demeurant, pour toute partie B de X, nous avons

$$(dc)(B) = d\left(\overline{B}\right) = X\backslash\overline{B} = \overset{\circ}{\widehat{X\backslash B}} = i(X\backslash B) = (id)(B)$$

et

$$(cd)(B) = c(X\backslash B) = \overline{X\backslash B} = \overset{\circ}{\widehat{X\backslash B}} = X\backslash\mathring{B} = d\left(\mathring{B}\right) = (di)(B),$$

c'est-à-dire

$$dc = id \qquad \text{et} \qquad cd = di,$$

où

$$i : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X),\ A \mapsto \mathring{A}.$$

Nous avons déjà vu ci-dessus que la proposition 7 livre

$$(ic)^2 = \alpha^2 = \alpha = ic \qquad \text{et} \qquad (ci)^2 = \beta^2 = \beta = ci.$$

De ce fait,

$$(dcdc)^2 = (iddc)^2 = (iec)^2 = (ic)^2 = ic = iec = iddc = dcdc.$$

Ainsi, d'après la proposition 6 à la page 7, le sous-monoïde de M engendré par d et c est l'ensemble

$$\Big\{e, d, c, dc, cd, dcd, cdc, dcdc, cdcd, dcdcd, cdcdc, dcdcdc, cdcdcd, dcdcdcd\Big\}.$$

Les expressions de certains éléments de ce sous-monoïde peuvent être simplifiées :

$$\begin{aligned}
dcd &= ddi = ei = i,\\
cdc &= dic = d\alpha,\\
dcdc &= ic = \alpha,\\
cdcd &= ci = \beta,\\
dcdcd &= d\beta,\\
cdcdc &= c\alpha = cic = \beta c,\\
dcdcdc &= d\beta c,\\
cdcdcd &= cd\beta = dici = d\alpha i,\\
dcdcdcd &= dd\alpha i = \alpha i.
\end{aligned}$$

Par conséquent, le sous-monoïde de M engendré par d et c est l'ensemble

$$\Big\{e, d, c, dc, di, i, d\alpha, \alpha, \beta, d\beta, \beta c, d\beta c, d\alpha i, \alpha i\Big\}.$$

Il en résulte que

$$\mathfrak{S}(A) = \Big\{A, A^*, \overline{A}, \overline{A}^*, \Big(\mathring{A}\Big)^*, \mathring{A}, \alpha(A)^*, \alpha(A), \beta(A), \beta(A)^*, \beta\Big(\overline{A}\Big), \beta\Big(\overline{A}\Big)^*, \alpha\Big(\mathring{A}\Big)^*, \alpha\Big(\mathring{A}\Big)\Big\}.$$

En particulier, sur la droite réelle (l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de sa topologie naturelle), pour

$$A = \big([0,1] \cap \mathbb{Q}\big) \cup [2,3[\, \cup\,]3,4] \cup \{5\},$$

l'ensemble $\mathfrak{S}(A)$ a exactement 14 éléments. En effet,

$$\begin{aligned}
A^* &=]-\infty, 0[\, \cup \big(]0,1[\, \cap \mathbb{Q}^*\big) \cup\,]1,2[\, \cup \{3\} \cup\,]4,5[\, \cup\,]5,+\infty[,\\
\overline{A^*} = \big(\mathring{A}\big)^* &=]-\infty, 2] \cup \{3\} \cup [4,+\infty[,\\
\mathring{A} &=]2,3[\, \cup\,]3,4[,\\
\overline{\mathring{A}} = \beta(A) &= [2,4],\\
\beta(A)^* &=]-\infty, 2[\, \cup\,]4,+\infty[,\\
\overline{\beta(A)^*} = \alpha\big(\mathring{A}\big)^* &=]-\infty, 2] \cup [4,+\infty[,\\
\alpha\big(\mathring{A}\big) &=]2,4[,\\
\overline{A} &= [0,1] \cup [2,4] \cup \{5\},\\
\big(\overline{A}\big)^* &=]-\infty, 0[\, \cup\,]1,2[\, \cup\,]4,5[\, \cup\,]5,+\infty[,\\
\overline{\big(\overline{A}\big)^*} = \alpha(A)^* &=]-\infty, 0] \cup [1,2] \cup [4,+\infty[,\\
\alpha(A) = \mathring{\overline{A}} &=]0,1[\, \cup\,]2,4[,\\
\overline{\alpha(A)} = \beta\big(\overline{A}\big) &= [0,1] \cup [2,4],\\
\beta\big(\overline{A}\big)^* &=]-\infty, 0[\, \cup\,]1,2[\, \cup\,]4,+\infty[.
\end{aligned}$$

Le schéma 1 à la page 13 donne une représentation graphique de ces 14 ensembles. $\square$

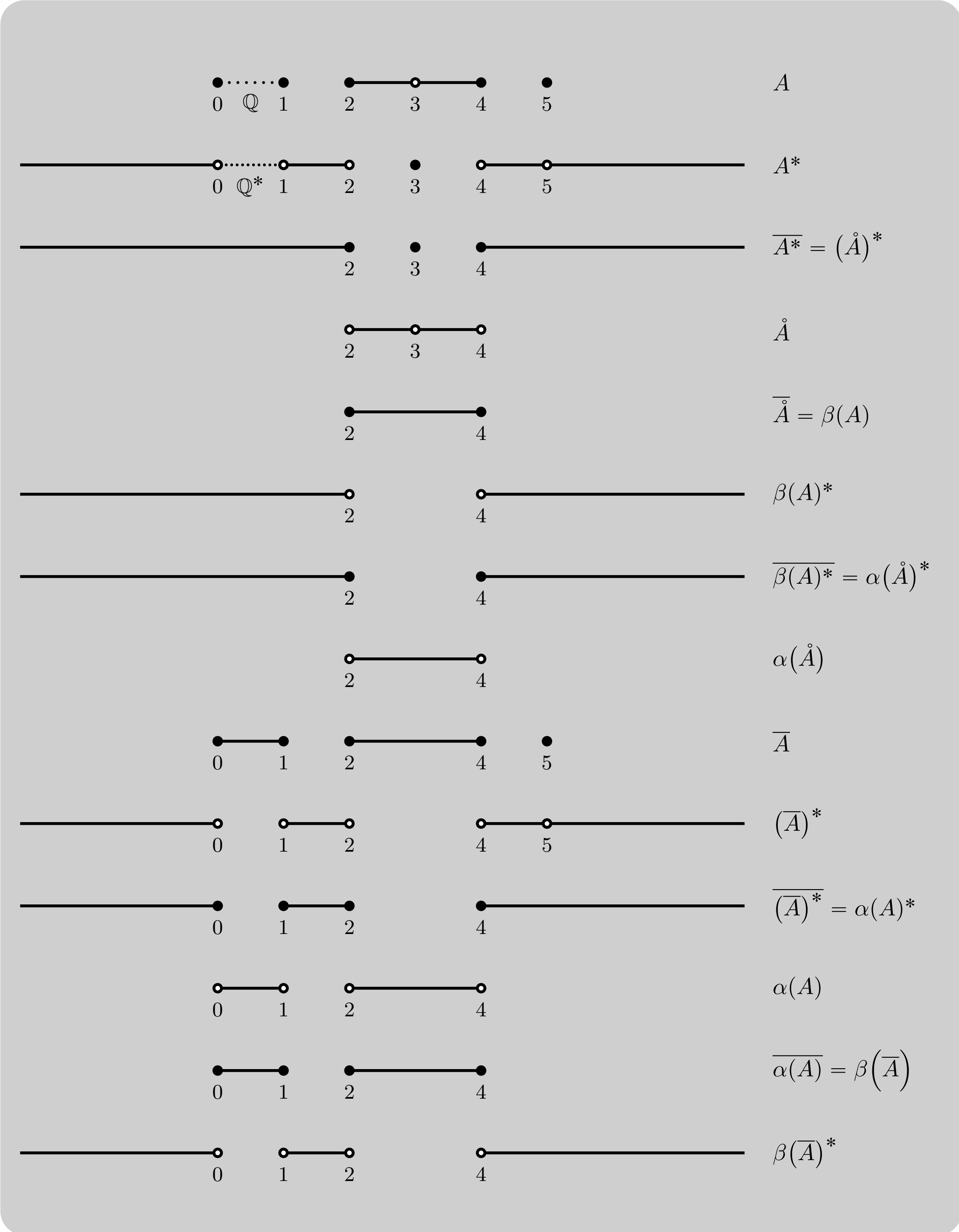

Schéma 1 – Complémentaires et adhérences successives d'une partie de la droite réelle

2.4. Le problème d'adhérence-intérieur-complémentaire

Dans la foulée de ce qui précède, il convient d'analyser ce qui advient lorsqu'on applique successivement le complémentaire, l'adhérence et l'intérieur à un ensemble.

Proposition 9.

Partant d'une partie donnée A d'un espace topologique X et comptant A lui-même, *au plus* 14 ensembles peuvent être construits en appliquant successivement le complémentaire, l'adhérence et l'intérieur. Il s'agit précisément des mêmes ensembles obtenus en appliquant successivement seulement le complémentaire et l'adhérence.

Démonstration :

Étant donné un espace topologique X, nous considérons les applications

$$d : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X),\ A \mapsto A^* = X \backslash A,$$

et

$$c : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X),\ A \mapsto \overline{A},$$

puis

$$i : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X),\ A \mapsto \mathring{A}.$$

Du reste, soit A une partie de X, et soit $\mathfrak{S}(A)$ l'ensemble constitué de l'ensemble A lui-même et de tous les ensembles obtenus en appliquant à A successivement le complémentaire, l'adhérence et l'intérieur. Alors, les éléments de $\mathfrak{S}(A)$ sont précisément les ensembles $\varphi(A)$, où φ appartient au sous-monoïde S de M engendré par les applications d, c et i. À l'évidence, S contient sous-monoïde S' de M engendré par les applications d et c. Cependant, dans la démonstration du théorème 1, nous avons vu que $i = dcd$. De ce fait, $i \in S'$. Puisque S est le plus petit sous-monoïde contenant d, c et i, il en découle que $S = S'$. Par conséquent, les éléments de $\mathfrak{S}(A)$ sont précisément les ensembles $\varphi(A)$, où φ appartient au sous-monoïde S' de M engendré par les applications d et c. Ceci conclut la démonstration. □

Références

[1] Bourbaki, N., **Algèbre : Chapitres 1 à 3**, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007.

[2] Bourbaki, N., *Elements of mathematics*, **General Topology**, Chapters 1 - 4, Springer-Verlag, Berlin, etc., 1989.

[3] Kelley, J. L., *General Topology*, Graduate Texts in Mathematics **27**, 2nd printing, Springer-Verlag, New York, etc., 1975.

[4] Kuratowski, K., *Sur l'operation $\overline{A}$ de l'analysis situs*, Fund. Math. **3** (1922), 182-199.