La propriété universelle des produits d'espaces vectoriels et ses corollaires

Christian V. Nguembou Tagne

12 septembre 2021

Cette note présente la propriété universelle des produits d'espaces vectoriels et ses principaux corollaires. Elle s'articule autour de l'exercice 1 de l'ouvrage **Algèbre linéaire et algèbre tensorielle** [1] par Chambadal et Ovaert.

I. Propriété universelle des produits d'espaces vectoriels

Théorème 1 (Propriété universelle des produits).

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, puis $F = \prod\limits_{i\in I} F_i$ l'espace vectoriel produit de cette famille d'espaces vectoriels ; et, pour tout $i \in I$, soit Pr_i le projecteur canonique de F sur F_i. Soit en outre E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Pour tout élément $(U_i)_{i\in I}$ de $\prod\limits_{i\in I} \mathscr{L}(E, F_i)$, il existe une application linéaire U et une seule de E dans F telle que $\mathrm{Pr}_i \circ U = U_i$ pour tout $i \in I$.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "U_i"] \arrow[d, "U"'] & F_i \\
F \arrow[ur, "\mathrm{Pr}_i"'] &
\end{tikzcd}$$

L'application linéaire U n'est autre que l'application qui à tout élément x de E associe l'élément $\big(U_i(x)\big)_{i\in I}$ de F.

L'application $(U_i)_{i\in I} \mapsto U$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\prod\limits_{i\in I} \mathscr{L}(E, F_i)$ sur l'espace vectoriel $\mathscr{L}\left(E, \prod\limits_{i\in I} F_i\right)$.

Démonstration :

Unicité. Soit U une application linéaire de E dans F telle que $\mathrm{Pr}_i \circ U = U_i$ pour tout $i \in I$. Alors, pour chaque élément x de E, il existe un élément $(y_j)_{j\in I}$ de F tel que $U(x) = (y_j)_{j\in I}$. De ce fait,

$$U_i(x) = (\mathrm{Pr}_i \circ U)(x) = \mathrm{Pr}_i\Big(U(x)\Big) = \mathrm{Pr}_i\Big((y_j)_{j\in I}\Big) = y_i,$$

et donc

$$U(x) = \big(U_i(x)\big)_{i\in I}. \tag{1}$$

Ceci prouve l'unicité de U.

Existence. Une application U de E dans F est bien définie par la formule (1). Pour des vecteurs x et y de E, et des scalaires α et β, nous avons

$$U(\alpha x + \beta y) = \big(U_i(\alpha x + \beta y)\big)_{i\in I} = \big(\alpha U_i(x) + \beta U_i(y)\big)_{i\in I} = \alpha\big(U_i(x)\big)_{i\in I} + \beta\big(U_i(y)\big)_{i\in I},$$

c'est-à-dire

$$U(\alpha x + \beta y) = \alpha U(x) + \beta U(y),$$

puis

$$(\mathrm{Pr}_i \circ U)(x) = \mathrm{Pr}_i\Big(U(x)\Big) = \mathrm{Pr}_i\Big(\big(U_j(x)\big)_{j\in I}\Big) = U_i(x).$$

L'application U est donc linéaire et vérifie $\mathrm{Pr}_i \circ U = U_i$ pour tout $i \in I$.

Linéarité. L'application φ de $\prod\limits_{i\in I} \mathscr{L}(E, F_i)$ dans $\mathscr{L}\left(E, \prod\limits_{i\in I} F_i\right)$ ainsi déterminée par $(U_i)_{i\in I} \mapsto U$, où U est définie par la formule (1), est *linéaire*. En effet, pour tout vecteur x de E, et chaque couple (α, β) de scalaires, si U et V sont les images respectives par φ des familles $(U_i)_{i\in I}$ et $(V_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\prod\limits_{i\in I} \mathscr{L}(E, F_i)$, alors

$$\Big((\alpha U_i + \beta V_i)(x)\Big)_{i\in I} = \Big(\alpha U_i(x) + \beta V_i(x)\Big)_{i\in I} = \alpha\Big(U_i(x)\Big)_{i\in I} + \beta\Big(V_i(x)\Big)_{i\in I}.$$

D'où

$$\varphi\Big(\alpha(U_i)_{i\in I} + \beta(V_i)_{i\in I}\Big) = \alpha\varphi\Big((U_i)_{i\in I}\Big) + \beta\varphi\Big((V_i)_{i\in I}\Big).$$

Injectivité et surjectivité. Supposons que l'image U d'une famille $(U_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\prod\limits_{i\in I} \mathscr{L}(E, F_i)$ par φ est nulle. Alors, pour tout $i \in I$ et chaque $x \in E$, nous avons

$$U_i(x) = 0.$$

De ce fait, si U est nulle, alors il en est de même pour tous les U_i. Le noyau de φ est donc réduit au vecteur nul ; l'application φ est par conséquent injective. Elle est au demeurant surjective, car, pour tout élément U de $\mathscr{L}\left(E, \prod\limits_{i\in I} F_i\right)$, en posant $U_i = \mathrm{Pr}_i \circ U$ pour chaque indice $i \in I$, nous obtenons une famille $(U_i)_{i\in I}$ appartenant à $\prod\limits_{i\in I} \mathscr{L}(E, F_i)$ qui est manifestement antécédent de U par φ. $\square$

II. Corollaires

Dans cette section, nous présentons les trois principaux corollaires de la propriété universelle des produits d'espaces vectoriels.

Corollaire 1 (Produit d'une famille d'applications linéaires).

Soient $(E_i)_{i\in I}$ et $(F_i)_{i\in I}$ deux familles d'espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$; puis soit Pr_j le projecteur canonique de $\prod\limits_{i\in I} E_i$ sur E_j et Pr'_j le projecteur canonique de $\prod\limits_{i\in I} F_i$ su F_j.

1. Pour tout élément $(V_i)_{i\in I}$ de $\prod\limits_{i\in I} \mathscr{L}(E_i, F_i)$, il existe une application linéaire V et une seule de $\prod\limits_{i\in I} E_i$ dans $\prod\limits_{i\in I} F_i$ telle que $\mathrm{Pr}'_j \circ V = V_j \circ \mathrm{Pr}_j$ pour tout $j \in J$.

$$\begin{tikzcd}
E_j \arrow[r, "V_j"] & F_j \\
\prod\limits_{i\in I} E_i \arrow[u, "\mathrm{Pr}_j"] \arrow[r, "V"'] & \prod\limits_{i\in I} F_i \arrow[u, "\mathrm{Pr}'_j"']
\end{tikzcd}$$

Cette application V, appelée **produit des applications linéaires** V_i, est également symbolisée par $\prod\limits_{i\in I} V_i$.

2. L'application $(V_i)_{i\in I} \mapsto \prod\limits_{i\in I} V_i$ est une application linéaire injective de l'espace produit $\prod\limits_{i\in I} \mathscr{L}(E_i, F_i)$ dans $\mathscr{L}\left(\prod\limits_{i\in I} E_i, \prod\limits_{i\in I} F_i\right)$; son image est constituée des applications linéaires W de $\prod\limits_{i\in I} E_i$ dans $\prod\limits_{i\in I} F_i$ telles que $(\mathrm{Pr}'_i \circ W)\big(\mathrm{Ker}(\mathrm{Pr}_i)\big)$ soit réduit au vecteur nul de F_i pour tout $i \in I$.

3. L'image et le noyau de $\prod\limits_{i\in I} V_i$ sont liés aux images et aux noyaux des applications linéaires V_i par les relations

$$\mathrm{Im}\left(\prod_{i\in I} V_i\right) = \prod_{i\in I} \mathrm{Im}(V_i) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ker}\left(\prod_{i\in I} V_i\right) = \prod_{i\in I} \mathrm{Ker}(V_i). \tag{2}$$

En particulier, pour que l'application $\prod\limits_{i\in I} V_i$ soit surjective (resp. injective), il faut et il suffit que, pour tout $i \in I$, l'application linéaire V_i soit surjective (resp. injective).

Démonstration :

Assertion 1. Il suffit ici d'appliquer la propriété universelle des produits (voir le théorème 1), en posant $E = \prod\limits_{i\in I} E_i$ et en considérant la famille $(U_i)_{i\in I}$ d'applications linéaires de E dans F_i, où $U_i = V_i \circ \mathrm{Pr}_i$ pour tout $i \in I$.

Assertion 2. Soit γ l'application de $\prod_{i\in I}\mathscr{L}(E_i,F_i)$ dans $\mathscr{L}\left(\prod_{i\in I}E_i,\prod_{i\in I}F_i\right)$ donnée par

$$(V_i)_{i\in I}\mapsto\prod_{i\in I}V_i,$$

et χ l'application de $\prod_{i\in I}\mathscr{L}(E_i,F_i)$ dans $\prod_{i\in I}\mathscr{L}(E,F_i)$ définie par $(V_i)_{i\in I}\mapsto(V_i\circ\mathrm{Pr}_i)_{i\in I}$. Nous considérons par ailleurs l'application φ de $\prod_{i\in I}\mathscr{L}(E,F_i)$ dans $\mathscr{L}\left(\prod_{i\in I}E_i,\prod_{i\in I}F_i\right)$ définie dans la démonstration du théorème 1. Alors, $\gamma=\varphi\circ\chi$. Puisque φ est un isomorphisme, il suffit donc de montrer que χ est une application linéaire injective.

En effet, si V_i et V_i' sont des applications linéaires de E_i dans F_i, et si α et β sont des scalaires, alors

$$\big[(\alpha V_i+\beta V_i')\circ\mathrm{Pr}_i\big](x)=\alpha V_i(x_i)+\beta V_i'(x_i)=\alpha\big[(V_i\circ\mathrm{Pr}_i)(x)\big]+\beta\big[(V_i'\circ\mathrm{Pr}_i)(x)\big]$$

pour tout vecteur $x=(x_i)_{i\in I}$ de E. Ceci signifie que l'application χ est linéaire. De plus, étant donné un élément $(V_i)_{i\in I}$ de $\prod_{i\in I}\mathscr{L}(E_i,F_i)$, si $(V_i\circ\mathrm{Pr}_i)_{i\in I}$ est le vecteur nul de l'espace vectoriel $\prod_{i\in I}\mathscr{L}(E,F_i)$, alors $V_i(x_i)=0$ pour chaque $i\in I$ et tout vecteur x_i de E_i. Le noyau de χ se réduit de ce fait au vecteur nul.

Soit W une application linéaire de $\prod_{i\in I}E_i$ dans $\prod_{i\in I}F_i$ contenue dans l'image de γ. Alors, il existe un élément $(V_i)_{i\in I}$ de $\prod_{i\in I}\mathscr{L}(E_i,F_i)$ tel que $\mathrm{Pr}_i'\circ W=V_i\circ\mathrm{Pr}_i$ pour tout $i\in I$. De ce fait, pour tout $i\in I$ et chaque élément $x=(x_j)_{j\in I}$ de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Pr}_i)$, nous avons $x_i=0$, puis

$$(\mathrm{Pr}_i'\circ W)(x)=(V_i\circ\mathrm{Pr}_i)(x)=V_i\big(\mathrm{Pr}_i(x)\big)=V_i(x_i)=V_i(0)=0,$$

et donc

$$(\mathrm{Pr}_i'\circ W)\Big(\mathrm{Ker}(\mathrm{Pr}_i)\Big)=\Big\{0\Big\}.$$

Si réciproquement W est un élément de $\mathscr{L}\left(\prod_{i\in I}E_i,\prod_{i\in I}F_i\right)$ vérifiant la dernière égalité pour tout $i\in I$, alors des applications linéaires V_i de E_i dans F_i sont définies par

$$V_i(x_i)=(\mathrm{Pr}_i'\circ W)\Big(\mathrm{In}_i(x_i)\Big).$$

De plus, pour tout élément $x=(x_j)_{j\in I}$ de $\prod_{i\in I}E_i$, nous avons $x=\mathrm{In}_i(x_i)+y$, où $y=(y_j)_{j\in I}$, puis $y_i=0$ et $y_j=x_j$ pour tout $j\in I-\{i\}$. Puisque y appartient à $\mathrm{Ker}(\mathrm{Pr}_i)$, ceci induit

$$(\mathrm{Pr}_i'\circ W)(x)=(\mathrm{Pr}_i'\circ W)\Big(\mathrm{In}_i(x_i)+y\Big)=(\mathrm{Pr}_i'\circ W)\Big(\mathrm{In}_i(x_i)\Big)=V_i(x_i)=V_i\Big(\mathrm{Pr}_i(x)\Big).$$

De ce fait, $\mathrm{Pr}_i'\circ W=V_i\circ\mathrm{Pr}_i$; l'élément $(V_i)_{i\in I}$ de $\prod_{i\in I}\mathscr{L}(E_i,F_i)$ défini ci-dessus est donc antécédent de W par γ.

Assertion 3. Soit $y = (y_i)_{i\in I}$ un élément de l'image de $\prod_{i\in I} V_i$. Alors, il existe un élément $(x_i)_{i\in I}$ de $\prod_{i\in I} E_i$ tel que $y = \Big(V_i(x_i)\Big)_{i\in I}$. Ceci entraîne $y_i = V_i(x_i)$ pour tout $i \in I$. Donc, $y \in \prod_{i\in I} \mathrm{Im}(V_i)$. L'image de $\prod_{i\in I} V_i$ est de ce fait contenue dans $\prod_{i\in I} \mathrm{Im}(V_i)$.

Pour établir l'inclusion réciproque, considérons un élément $y = (y_i)_{i\in I}$ de $\prod_{i\in I} \mathrm{Im}(V_i)$. Alors, pour tout $i \in I$, il existe un vecteur x_i de E_i vérifiant $y_i = V_i(x_i)$. Donc,

$$x = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i \qquad \text{et} \qquad y = \Big(V_i(x_i)\Big)_{i\in I} = \left(\prod_{i\in I} V_i\right)(x).$$

Ceci signifie que y appartient à l'image de $\prod_{i\in I} V_i$. Par conséquent, l'image de $\prod_{i\in I} V_i$ contient $\prod_{i\in I} \mathrm{Im}(V_i)$. La première égalité de (2) est ainsi prouvée.

Soit $x = (x_i)_{i\in I}$ un élément du noyau de $\prod_{i\in I} V_i$. Alors, $\Big(V_i(x_i)\Big)_{i\in I}$ est le vecteur nul de $\prod_{i\in I} F_i$. Ceci entraîne $V_i(x_i) = 0$ pour tout $i \in I$, et donc $x \in \prod_{i\in I} \mathrm{Ker}(V_i)$. De ce fait, le noyau de $\prod_{i\in I} V_i$ est contenu dans $\prod_{i\in I} \mathrm{Ker}(V_i)$.

Pour montrer l'inclusion réciproque, considérons un élément $x = (x_i)_{i\in I}$ de $\prod_{i\in I} \mathrm{Ker}(V_i)$. Alors, $V_i(x_i) = 0$ pour tout $i \in I$ et $\left(\prod_{i\in I} V_i\right)(x) = \Big(V_i(x_i)\Big)_{i\in I} = 0$. Par suite, x appartient au noyau de $\prod_{i\in I} V_i$. Ce dernier contient donc $\prod_{i\in I} \mathrm{Ker}(V_i)$. D'où la seconde égalité de (2).

Le reste de l'assertion 3 découle de manière triviale des égalités (2). $\square$

Corollaire 2 (Produit d'une famille de sous-espaces vectoriels).

Si E_i est un sous-espace vectoriel de F_i pour tout $i \in I$, et si V_i est l'injection canonique de E_i dans F_i, alors $\prod_{i\in J} E_i$ est un sous-espace vectoriel de $\prod_{i\in I} F_i$, et $\prod_{i\in I} V_i$ n'est autre que l'injection canonique de $\prod_{i\in I} E_i$ dans $\prod_{i\in I} F_i$.

Démonstration :

Soient $x = (x_i)_{i\in I}$ et $y = (y_i)_{i\in I}$ des vecteurs de $\prod_{i\in I} E_i$, puis α et β des scalaires. Alors, $\alpha x + \beta y = (\alpha x_i + \beta y_i)_{i\in I}$ appartient à $\prod_{i\in I} E_i$, car E_i est un sous-espace vectoriel de F_i pour tout $i \in I$. Donc, $\prod_{i\in I} E_i$ un sous-espace vectoriel de $\prod_{i\in I} F_i$. Au demeurant,

$$\left(\prod_{i\in I} V_i\right)(x) = \Big(V_i(x_i)\Big)_{i\in I} = (x_i)_{i\in I} = x.$$

De ce fait, $\prod_{i\in I} V_i$ est l'injection canonique de $\prod_{i\in I} E_i$ dans $\prod_{i\in I} F_i$. $\square$

Corollaire 3 (Produit d'une famille d'espaces vectoriels quotients).

Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, et E'_i un sous-espace vectoriel de E_i pour tout $i \in I$. On désigne par V_i l'application linéaire canonique de E_i sur E_i/E'_i. Alors, $\prod_{i\in I} V_i$ est une application linéaire surjective, dite canonique, de $\prod_{i\in I} E_i$ sur $\prod_{i\in I}(E_i/E'_i)$, dont le noyau est $\prod_{i\in I} E'_i$.

Ainsi, l'espace vectoriel $\prod_{i\in I}(E_i/E'_i)$ est canoniquement isomorphe à l'espace vectoriel $\left(\prod_{i\in I} E_i\right) \Big/ \left(\prod_{i\in I} E'_i\right)$.

Démonstration :

D'après le corollaire 1, l'image du produit des applications linéaires canoniques V_i de E_i sur E_i/E'_i est donnée par

$$\mathrm{Im}\left(\prod_{i\in I} V_i\right) = \prod_{i\in I} \mathrm{Im}(V_i) = \prod_{i\in I}(E_i/E'_i).$$

Donc, $\prod_{i\in I} V_i$ est une application linéaire surjective de $\prod_{i\in I} E_i$ sur $\prod_{i\in I}(E_i/E'_i)$. Son noyau est

$$\mathrm{Ker}\left(\prod_{i\in I} V_i\right) = \prod_{i\in I} \mathrm{Ker}(V_i) = \prod_{i\in I} E'_i.$$

En vertu du *théorème d'homomorphie*, il en résulte que l'espace vectoriel $\prod_{i\in I}(E_i/E'_i)$ est canoniquement isomorphe à l'espace vectoriel $\left(\prod_{i\in I} E_i\right) \Big/ \left(\prod_{i\in I} E'_i\right)$. □

Références

[1] L. Chambadal et J.-L. Ovaert, **Algèbre linéaire et algèbre tensorielle**, Dunod, Paris, 1968.