La propriété universelle des sommes directes et ses corollaires

Christian V. Nguembou Tagne

13 septembre 2021

Cette note est dédiée à l'étude de la propriété universelle des sommes directes d'espaces vectoriels et de ses corollaires. L'approche adoptée ici est celle de Chambadal et Ovaert dans leur ouvrage **Algèbre linéaire et algèbre tensorielle** [1].

Propriété universelle des sommes directes

Théorème 1 (Propriété universelle des sommes directes).

Soient $(E_j)_{j\in J}$ une famille d'espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, et E la somme directe de cette famille. De plus, pour tout $j \in J$, soit In_j l'injection canonique de E_j dans E. En outre, soit F un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Alors, pour tout élément $(U_j)_{j\in J}$ de $\prod\limits_{j\in J} \mathscr{L}(E_j, F)$, il existe une application linéaire U et une seule de E dans F telle que $U_j = U \circ \mathrm{In}_j$ pour tout $j \in J$.

$$\begin{tikzcd}
E_j \arrow[r, "U_j"] \arrow[d, "\mathrm{In}_j"'] & F \\
E \arrow[ur, "U"'] &
\end{tikzcd}$$

L'application linéaire U n'est autre que l'application qui à tout élément $(x_j)_{j\in J}$ de $E = \bigoplus\limits_{j\in J} E_j$ associe l'élément $\sum\limits_{j\in J} U_j(x_j)$ de F.

De plus, l'application $(U_j)_{j\in J} \mapsto U$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\prod\limits_{j\in J} \mathscr{L}(E_j, F)$ sur l'espace vectoriel $\mathscr{L}\left(\bigoplus\limits_{j\in J} E_j, F\right)$.

Démonstration :

Unicité. Soit U une application linéaire de E dans F telle que $U_j = U \circ \mathrm{In}_j$ pour tout $j \in J$. Pour tout élément $x = (x_j)_{j\in J}$ de E, l'ensemble des indices j tels que x_j soit non nul étant fini, nous avons $x = \sum\limits_{j\in J} \mathrm{In}_j(x_j)$, et donc

$$U(x) = \sum_{j\in J} U_j(x_j). \tag{1}$$

Ceci prouve l'unicité de U.

Existence. Une application U de E dans F est bien définie par la formule (1). Pour des vecteurs $x = (x_j)_{j\in J}$ et $y = (y_j)_{j\in J}$ de E, et des scalaires α et β, nous avons

$$U(\alpha x + \beta y) = \sum_{j\in J} U_j(\alpha x_j + \beta y_j) = \alpha \left(\sum_{j\in J} U_j(x_j) \right) + \beta \left(\sum_{j\in J} U_j(y_j) \right) = \alpha U(x) + \beta U(y).$$

L'application U est donc linéaire. De plus, pour tout $j \in J$ et chaque $a \in E_j$, nous posons $x = (x_k)_{k\in J} = \mathrm{In}_j(a)$. Alors, $x_j = a$ et $x_k = 0$ si $k \neq j$. De ce fait,

$$U_j(a) = U_j(x_j) = \sum_{k\in J} U_k(x_k) = U(x) = U\big(\mathrm{In}_j(a)\big) = (U \circ \mathrm{In}_j)(a).$$

D'où $U_j = U \circ \mathrm{In}_j$ pour tout $j \in J$.

Linéarité. L'application φ de $\prod\limits_{j\in J} \mathscr{L}(E_j, F)$ dans $\mathscr{L}\left(\bigoplus\limits_{j\in J} E_j, F\right)$ ainsi déterminée par $(U_j)_{j\in J} \mapsto U$, où U est définie par la formule (1), est *linéaire*. En effet, pour tout vecteur $x = (x_j)_{j\in J}$ de E, et chaque couple (α, β) de scalaires, si U et V sont les images respectives par φ des familles $(U_j)_{j\in J}$ et $(V_j)_{j\in J}$ d'éléments de $\prod\limits_{j\in J} \mathscr{L}(E_j, F)$, alors

$$(\alpha U + \beta V)(x) = \alpha U(x) + \beta V(x) = \sum_{j\in J} \big(\alpha U_j(x_j) + \beta V_j(x_j)\big) = \sum_{j\in J} (\alpha U_j + \beta V_j)(x_j).$$

Injectivité et surjectivité. Supposons que l'image U d'une famille $(U_j)_{j\in J}$ d'éléments de $\prod\limits_{j\in J} \mathscr{L}(E_j, F)$ par φ est nulle. Alors, pour tout $j \in J$ et chaque $a \in E_j$, nous avons

$$U_j(a) = (U \circ \mathrm{In}_j)(a) = U\big(\mathrm{In}_j(a)\big) = 0.$$

Ainsi, si U est nulle, alors il en est de même pour tous les U_j. Le noyau de φ est donc réduit au vecteur nul ; l'application φ est par conséquent injective. Elle est au demeurant surjective, car, pour tout élément U de $\mathscr{L}\left(\bigoplus\limits_{j\in J} E_j, F\right)$, en posant $U_j = U \circ \mathrm{In}_j$ pour chaque indice $j \in J$, nous obtenons une famille $(U_j)_{j\in J}$ appartenant à $\prod\limits_{j\in J} \mathscr{L}(E_j, F)$ qui est manifestement antécédent de U par φ. $\square$

Corollaires

Dans cette section, nous présentons quatre corollaires pratiques de la propriété universelle des sommes directes.

Corollaire 1 (Somme directe d'une famille d'applications linéaires).

Soient $(E_j)_{j\in J}$ et $(F_j)_{j\in J}$ deux familles d'espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, puis In_j l'injection canonique de E_j dans $E = \bigoplus\limits_{j\in J} E_j$ et In'_j l'injection canonique de F_j dans $F = \bigoplus\limits_{j\in J} F_j$.

1. Pour tout élément $(V_j)_{j\in J}$ de $\prod\limits_{j\in J} \mathscr{L}(E_j, F_j)$, il existe une application linéaire et une seule, notée $\bigoplus\limits_{j\in J} V_j$, de E dans F telle que, pour tout $k \in J$, on ait

$$\left(\bigoplus_{j\in J} V_j\right) \circ \mathrm{In}_k = \mathrm{In}'_k \circ V_k :$$

$$\begin{tikzcd}
E_k \arrow[r, "V_k"] \arrow[d, "\mathrm{In}_k"'] & F_k \arrow[d, "\mathrm{In}'_k"] \\
\bigoplus\limits_{j\in J} E_j \arrow[r, "\bigoplus\limits_{j\in J} V_j"'] & \bigoplus\limits_{j\in J} F_j
\end{tikzcd}$$

Cette application linéaire s'appelle **somme directe des applications linéaires** V_j.

2. L'application linéaire $(V_j)_{j\in J} \mapsto \bigoplus\limits_{j\in J} V_j$ est une application linéaire injective de $\prod\limits_{j\in J} \mathscr{L}(E_j, F_j)$ dans $\mathscr{L}(E, F)$; son image est constituée des applications linéaires W de E dans F telles que $(W \circ \mathrm{In}_j)(E_j) \subset \mathrm{In}'_j(F_j)$ pour tout $j \in J$.

3. L'image et le noyau de $\bigoplus\limits_{j\in J} V_j$ sont liés aux images et aux noyaux des applications linéaires V_j par les relations

$$\mathrm{Im}\left(\bigoplus_{j\in J} V_j\right) = \bigoplus_{j\in J} \mathrm{Im}(V_j) \tag{2}$$

et

$$\mathrm{Ker}\left(\bigoplus_{j\in J} V_j\right) = \bigoplus_{j\in J} \mathrm{Ker}(V_j). \tag{3}$$

En particulier, pour que l'application $\bigoplus\limits_{j\in J} V_j$ soit surjective (resp. injective), il faut et il suffit que, pour tout $j \in J$, l'application linéaire V_j soit surjective (resp. injective).

Démonstration :

Assertion 1. Il suffit ici d'appliquer la propriété universelle des sommes directes (voir le théorème 1), en posant $F = \bigoplus_{j\in J} F_j$ et en considérant la famille $(U_j)_{j\in J}$ d'applications linéaires de E_j dans F, où $U_j = \mathrm{In}'_j \circ V_j$ pour tout $j \in J$.

Assertion 2. Soit γ l'application de $\prod_{j\in J} \mathscr{L}(E_j, F_j)$ dans $\mathscr{L}(E, F)$ donnée par

$$(V_j)_{j\in J} \mapsto \bigoplus_{j\in J} V_j,$$

et χ l'application de $\prod_{j\in J} \mathscr{L}(E_j, F_j)$ dans $\prod_{j\in J} \mathscr{L}(E_j, F)$ définie par $(V_j)_{j\in J} \mapsto (\mathrm{In}'_j \circ V_j)_{j\in J}$. Nous considérons par ailleurs l'application φ de $\prod_{j\in J} \mathscr{L}(E_j, F)$ dans $\mathscr{L}(E, F)$ définie dans la démonstration du théorème 1. Alors, $\gamma = \varphi \circ \chi$. Puisque φ est un isomorphisme, il suffit donc de montrer que χ est une application linéaire injective.

En effet, si V_j et V'_j sont des applications linéaires de E_j dans F_j, et si α et β sont des scalaires, alors

$$[\mathrm{In}'_j \circ (\alpha V_j + \beta V'_j)](x_j) = \alpha[(\mathrm{In}_j \circ V_j)(x_j)] + \beta[(\mathrm{In}_j \circ V'_j)(x_j)]$$

pour tout vecteur x_j de E_j. Ceci signifie que l'application χ est linéaire. De plus, étant donné un élément $(V_j)_{j\in J}$ de $\prod_{j\in J} \mathscr{L}(E_j, F_j)$, si $(\mathrm{In}'_j \circ V_j)_{j\in J}$ est le vecteur nul de l'espace vectoriel $\prod_{j\in J} \mathscr{L}(E_j, F)$, alors $V_j(x_j) = 0$ pour chaque $j \in J$ et tout vecteur x_j de E_j. Le noyau de χ se réduit de ce fait au vecteur nul.

Soit W une application linéaire de E dans F contenue dans l'image de γ. Alors, il existe un élément $(V_j)_{j\in J}$ de $\prod_{j\in J} \mathscr{L}(E_j, F_j)$ tel que $W \circ \mathrm{In}_j = \mathrm{In}'_j \circ V_j$ pour tout $j \in J$; d'où

$$(W \circ \mathrm{In}_j)(E_j) \subset \mathrm{In}'_j(F_j).$$

Si réciproquement W est un élément de $\mathscr{L}(E, F)$ vérifiant la dernière inclusion pour tout $j \in J$, alors des applications linéaires V_j de E_j dans F_j sont définies par

$$V_j(x_j) = \mathrm{Pr}'_j((W \circ \mathrm{In}_j)(x_j)),$$

où Pr'_j est la projection canonique de $\prod_{k\in J} F_k$ sur F_j ; elles vérifient $W \circ \mathrm{In}_j = \mathrm{In}'_j \circ V_j$; l'élément $(V_j)_{j\in J}$ de $\prod_{j\in J} \mathscr{L}(E_j, F_j)$ ainsi défini est donc antécédent de W par γ.

Assertion 3. Soit $y = (y_j)_{j\in J}$ un élément de l'image de $\bigoplus_{j\in J} V_j$. Alors, il existe un élément $(x_j)_{j\in J}$ de E tel que $y = \sum_{j\in J} (\mathrm{In}'_j \circ V_j)(x_j)$. Ceci entraîne $y_j = V_j(x_j)$ pour tout $j \in J$. Donc, $y \in \bigoplus_{j\in J} \mathrm{Im}(V_j)$. L'image de $\bigoplus_{j\in J} V_j$ est de ce fait contenue dans $\bigoplus_{j\in J} \mathrm{Im}(V_j)$.

Pour établir l'inclusion réciproque, considérons un élément $y = (y_j)_{j\in J}$ de $\bigoplus_{j\in J} \mathrm{Im}(V_j)$. Alors, pour tout $j \in J$, il existe un vecteur x_j de E_j vérifiant $y_j = V_j(x_j)$, et l'ensemble des indices $j \in J$ tels que x_j soit non nul est fini. D'où $x = (x_j)_{j\in J}$ est un vecteur de $\bigoplus_{j\in J} E_j$ et

$$y = \sum_{j\in J} (\mathrm{In}'_j \circ V_j)(x_j) = \left(\bigoplus_{j\in J} V_j\right)(x).$$

Ceci signifie que y appartient à l'image de $\bigoplus_{j\in J} V_j$. Par conséquent, l'image de $\bigoplus_{j\in J} V_j$ contient $\bigoplus_{j\in J} \mathrm{Im}(V_j)$. L'égalité (2) est ainsi prouvée.

Soit $x = (x_j)_{j\in J}$ un élément du noyau de $\bigoplus_{j\in J} V_j$. Alors, $\sum_{j\in J} (\mathrm{In}'_j \circ V_j)(x_j) = 0$. Ceci entraîne $V_j(x_j) = 0$ pour tout $j \in J$, et donc $x \in \bigoplus_{j\in J} \mathrm{Ker}(V_j)$. De ce fait, le noyau de $\bigoplus_{j\in J} V_j$ est contenu dans $\bigoplus_{j\in J} \mathrm{Ker}(V_j)$.

Pour montrer l'inclusion réciproque, considérons un élément $x = (x_j)_{j\in J}$ de $\bigoplus_{j\in J} \mathrm{Ker}(V_j)$. Alors, $V_j(x_j) = 0$ pour chaque $j \in J$ et

$$\left(\bigoplus_{j\in J} V_j\right)(x) = \sum_{j\in J} (\mathrm{In}'_j \circ V_j)(x_j) = 0.$$

Ceci signifie que x appartient au noyau de $\bigoplus_{j\in J} V_j$. Ce dernier contient par conséquent $\bigoplus_{j\in J} \mathrm{Ker}(V_j)$. D'où l'égalité (3).

Le reste de l'assertion 3 découle de manière triviale des égalités (2) et (3). $\square$

Corollaire 2 (Somme directe d'une famille de sous-espaces vectoriels).

Si E_j est un sous-espace vectoriel de F_j pour tout $j \in J$, et si V_j est l'injection canonique de E_j dans F_j, alors $\bigoplus_{j\in J} E_j$ est un sous-espace vectoriel de $\bigoplus_{j\in J} F_j$, et $\bigoplus_{j\in J} V_j$ n'est autre que l'injection canonique de $\bigoplus_{j\in J} E_j$ dans $\bigoplus_{j\in J} F_j$.

Démonstration :

Soient $x = (x_j)_{j\in J}$ et $y = (y_j)_{j\in J}$ des vecteurs de $\bigoplus_{j\in J} E_j$, puis α et β des scalaires. Alors, $\alpha x + \beta y = (\alpha x_j + \beta y_j)_{j\in J}$ appartient à $\prod_{j\in J} E_j$, car E_j est un sous-espace vectoriel de F_j pour tout $j \in J$. Cependant, l'ensemble des indices $j \in J$ tels que $x_j \neq 0$ est fini ; il en est de même pour l'ensemble des indices $j \in J$ tels que $y_j \neq 0$. De ce fait, l'ensemble des indices $j \in J$ tels que $\alpha x_j + \beta y_j \neq 0$ est fini. Par conséquent, $\alpha x + \beta y$ appartient à l'ensemble $\bigoplus_{j\in J} E_j$. Ce dernier est donc un sous-espace vectoriel de $\bigoplus_{j\in J} F_j$. Au demeurant, pour tout $k \in J$, si

In'_k désigne l'injection canonique de F_k dans $\bigoplus_{j\in J} F_j$, alors

$$\left(\bigoplus_{j\in J} V_j\right)(x) = \sum_{j\in J}(\text{In}'_j \circ V_j)(x_j) = \sum_{j\in J}\text{In}'_j(V_j(x_j)) = \sum_{j\in J}\text{In}'_j(x_j) = x.$$

De ce fait, $\bigoplus_{j\in J} V_j$ est l'injection canonique de $\bigoplus_{j\in J} E_j$ dans $\bigoplus_{j\in J} F_j$. $\square$

Corollaire 3 (Somme directe d'une famille d'espaces vectoriels quotients).

Soit $(E_j)_{j\in J}$ une famille d'espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, et E'_j un sous-espace vectoriel de E_j pour tout $j \in J$. On désigne par V_j l'application linéaire canonique de E_j sur E_j/E'_j. Alors, $\bigoplus_{j\in J} V_j$ est une application linéaire surjective, dite canonique, de $\bigoplus_{j\in J} E_j$ sur $\bigoplus_{j\in J}(E_j/E'_j)$, dont le noyau est $\bigoplus_{j\in J} E'_j$.

Ainsi, l'espace vectoriel $\bigoplus_{j\in J}(E_j/E'_j)$ est canoniquement isomorphe à l'espace vectoriel $\left(\bigoplus_{j\in J} E_j\right) \Big/ \left(\bigoplus_{j\in J} E'_j\right)$.

Démonstration :

D'après le corollaire 1, l'image de la somme directe des applications linéaires canoniques V_j de E_j sur E_j/E'_j est donnée par

$$\text{Im}\left(\bigoplus_{j\in J} V_j\right) = \bigoplus_{j\in J}\text{Im}(V_j) = \bigoplus_{j\in J}(E_j/E'_j).$$

Donc, $\bigoplus_{j\in J} V_j$ est une application linéaire surjective de $\bigoplus_{j\in J} E_j$ sur $\bigoplus_{j\in J}(E_j/E'_j)$. Son noyau est

$$\text{Ker}\left(\bigoplus_{j\in J} V_j\right) = \bigoplus_{j\in J}\text{Ker}(V_j) = \bigoplus_{j\in J} E'_j.$$

En vertu du *théorème d'homomorphie*, il en résulte que l'espace vectoriel $\bigoplus_{j\in J}(E_j/E'_j)$ est canoniquement isomorphe à l'espace vectoriel $\left(\bigoplus_{j\in J} E_j\right) \Big/ \left(\bigoplus_{j\in J} E'_j\right)$. $\square$

Le corollaire 4 suivant va permettre par la suite de proposer une définition plus commode de la somme directe de sous-espaces vectoriels.

Corollaire 4 (Application linéaire associée à une famille de sous-espaces vectoriels).

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E, puis $\bigoplus\limits_{i\in I} E_i$ la somme directe de ces espaces vectoriels, et In_j l'injection canonique de E_j dans $\bigoplus\limits_{i\in I} E_i$. Il existe une application linéaire U et une seule de $\bigoplus\limits_{i\in I} E_i$ dans E telle que $(U \circ \mathrm{In}_j)(x_j) = x_j$ pour tout élément j de I et tout vecteur x_j de E_j.

L'application linéaire U n'est autre que l'application qui à tout élément $(x_i)_{i\in I}$ de $\bigoplus\limits_{i\in I} E_i$ associe l'élément $\sum\limits_{i\in I} x_i$ de E.

Ainsi, l'image de U est la somme $\sum\limits_{i\in I} E_i$ des sous-espaces vectoriels de E_i, et le noyau de U est l'ensemble $(x_i)_{i\in I}$ de $\bigoplus\limits_{i\in I} E_i$ tels que $\sum\limits_{i\in I} x_i = 0$.

Démonstration :

Il suffit d'appliquer le théorème 1 au cas où $F = E$, et où U_j est l'injection canonique de E_j dans E pour tout $j \in J$. □

Nous allons maintenant caractériser la surjectivité, l'injectivité et la bijectivité de l'application linéaire U du corollaire 4 ci-dessus.

✍ **(Surjectivité)**

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) L'application linéaire U est surjective.

(b) La somme des sous-espaces vectoriels E_i est égale à E tout entier.

(c) La partie $\bigcup\limits_{i\in I} E_i$ engendre E.

Ces équivalences se déduisent de manière triviale de la définition de U.

✍ **(Injectivité)**

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) L'application linéaire U est injective.

(b) Le seul élément $(x_i)_{i\in I}$ de $\bigoplus\limits_{i\in I} E_i$ tel que $\sum\limits_{i\in I} x_i = 0$ est l'élément nul.

(c) Pour tout élément i de I, l'intersection $E_i \cap E'_i$ est réduite au vecteur nul, où

$$E'_i = \sum_{j\in I-\{i\}} E_j.$$

L'équivalence des assertions (**a**) et (**b**) découle trivialement de la définition de U.

(**b**) $\Rightarrow$ (**c**) : Soit i un indice de I et x_i un élément de $E_i \cap E'_i$. Alors, il existe une famille $(x_j)_{j\in J}$ d'éléments de E, où J est une partie finie de I ne contenant pas i, telle que l'on ait $x_j \in E_j$ pour tout $j \in J$, et $x_i = \sum\limits_{j\in J} x_j$. D'où la relation $x_i + \sum\limits_{j\in J}(-x_j) = 0$. Ceci induit $x_i = 0$ et $x_j = 0$ pour tout $j \in J$. L'intersection $E_i \cap E'_i$ est donc réduite au vecteur nul.

(**c**) $\Rightarrow$ (**b**) : Soit $x = (x_i)_{i\in I}$ un élément de $\bigoplus\limits_{i\in I} E_i$ telle que $\sum\limits_{i\in I} x_i = 0$, puis h un indice quelconque de I. Alors, $x_h = \sum\limits_{i\in I-\{h\}} (-x_i)$. Le vecteur x_h appartient donc simultanément à E_h et à E'_h ; il est de ce fait nul. Par conséquent, x est le vecteur nul.

✍ **(Bijectivité)**

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) L'application linéaire U est bijective ; autrement dit, U est isomorphisme de $\bigoplus\limits_{i\in I} E_i$ sur E.

(b) Tout élément x de E peut s'écrire d'une manière et d'une seule sous la forme $x = \sum\limits_{i\in I} x_i$, où $x_i \in E_i$, et où l'ensemble des indices i tels que x_i soit non nul est fini.

(c) La partie $\bigcup\limits_{i\in I} E_i$ engendre E, et, pour tout $i \in I$, l'intersection $E_i \cap E'_i$ est réduite au vecteur nul, où $E'_i = \sum\limits_{j\in I-\{i\}} E_j$.

L'équivalence des assertions (**a**) et (**c**) est une conséquence des équivalences sur la surjectivité et l'injectivité vues en amont.

(**a**) $\Rightarrow$ (**b**) : Soit x un vecteur de E. La surjectivité de U entraîne l'existence d'une famille $(x_i)_{i\in I}$ de $\bigoplus\limits_{i\in I} E_i$ telle que

$$x = \sum_{i\in I} x_i. \tag{4}$$

Si une autre famille $(x'_i)_{i\in I}$ de $\bigoplus\limits_{i\in I} E_i$ vérifie $x = \sum\limits_{i\in I} x'_i$, alors $\sum\limits_{i\in I}(x_i - x'_i) = 0$, et donc $x_i - x'_i = 0$ pour tout $i \in I$, eu égard à l'injectivité de U. D'où l'existence et l'unicité de l'écriture de la forme (4), où $x_i \in E_i$, et où l'ensemble des indices i tels que x_i soit non nul est fini.

(**b**) $\Rightarrow$ (**a**) : L'existence d'une écriture de la forme (4) pour tout vecteur x de E signifie que la somme des sous-espaces vectoriels E_i est égale à E tout entier, c'est-à-dire que l'application U est surjective. L'unicité de cette écriture pour le vecteur nul induit que le seul élément $(x_i)_{i\in I}$ de $\bigoplus\limits_{i\in I} E_i$ tel que $\sum\limits_{i\in I} x_i = 0$ est l'élément nul ; d'où l'injectivité de U.

Lorsque l'application U est bijective, il est d'usage d'identifier les espaces vectoriels E et $\bigoplus\limits_{i\in I} E_i$. La définition 1 suivante précise les modalités de cette identification.

Définition 1 (Somme directe de sous-espaces vectoriels).

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. On dit que E est **somme directe** des sous-espaces vectoriels E_i lorsque l'application linéaire U associée à la famille $(E_i)_{i\in I}$ est un isomorphisme de $\bigoplus\limits_{i\in I} E_i$ sur E.

On dit que la somme $F = \sum\limits_{i\in I} E_i$ des sous-espaces vectoriels E_i est **directe** si F est somme directe des sous-espaces vectoriels E_i. On emploie alors la notation

$$F = \bigoplus_{i\in I} E_i.$$

L'abus de langage introduit est sans conséquence, puisque F est canoniquement isomorphe à l'espace vectoriel $\bigoplus\limits_{i\in I} E_i$.

Ainsi, lorsque E est somme directe des sous-espaces vectoriels, tout vecteur x de E s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme

$$x = \sum_{i\in I} x_i,$$

où $x_i \in E_i$ pour tout $i \in I$. Le vecteur x_i s'appelle i**-ième composante** du vecteur x.

Références

[1] L. Chambadal et J.-L. Ovaert, **Algèbre linéaire et algèbre tensorielle**, Dunod, Paris, 1968.