

Le théorème de Cantor-Bernstein

Soient E et F deux ensembles tels qu'il existe une injection f de E dans F et une injection g de F dans E . L'objectif de cet exercice est de montrer qu'il existe une bijection de E sur F .

(1) Montrez que, si l'un des ensembles E et F est vide, alors l'autre est également vide.

Dans toute la suite, soient les ensembles E et F non vides.

(2) Soit \mathfrak{A} la famille des parties A de E telles que

$$g(F - f(A)) \subset E - A.$$

Montrez que cette famille \mathfrak{A} n'est pas vide, et que $K = \bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A$ appartient à \mathfrak{A} .

(3) Soit $H = E - g(F - f(K))$. Prouvez que H appartient à \mathfrak{A} .

(4) Montrez que $H = K$.

(5) À l'aide de (4), montrez qu'une application bijective h est définie de E dans F par

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in K, \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \in E - K. \end{cases}$$

[Si x est un élément de $g(F)$, alors $g^{-1}(x)$ désigne l'unique antécédent de x par g .]