Les coupures de Dedekind

Une construction du corps commutatif totalement ordonné et complet des nombres réels

Christian V. Nguembou Tagne

16 novembre 2021

Dans cette note, nous allons à découverte d'une construction due au mathématicien allemand Richard Dedekind (1831 – 1916), permettant d'obtenir le corps totalement ordonné et **complet** $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$ des réels à partir du corps totalement ordonné, mais **incomplet**, $(\mathbb{Q}, +, \times, \leqslant)$ des nombres rationnels.

Table des matières

1. Définitions

Cette section présente des définitions équivalentes des **coupures de Dedekind**.

Définition 1.

Une partie A de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est appelé **coupure** de $\mathbb{Q}$ si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

($\mathbf{C_1}$) $A \neq \emptyset$ et $A \neq \mathbb{Q}$.

($\mathbf{C_2}$) $(\forall q \in A)(\forall q' \in \mathbb{Q})(q' < q \Rightarrow q' \in A)$.

($\mathbf{C_3}$) $(\forall q \in A)(\exists q' \in A)(q < q')$.

L'ensemble des coupures de $\mathbb{Q}$ est noté $\mathbb{R}$ et chaque coupure est appelée **nombre réel**.

Les conditions ($\mathbf{C_2}$) et ($\mathbf{C_3}$) de la définition 1 ci-dessus peuvent être formulée autrement.

Par exemple, la condition ($\mathbf{C_3}$) signifie que A n'admet pas de plus petit élément.

Au demeurant, la condition ($\mathbf{C_2}$) est équivalente à

$$(\mathbf{C_2'}) \quad (\forall q \in A)(\forall q' \in \mathbb{Q}\backslash A)(q < q').$$

En effet, si la condition ($\mathbf{C_2}$) est vérifiée, alors, pour tout $q \in A$ et chaque $q' \in \mathbb{Q}\backslash A$, nous avons $q < q'$; en effet, puisque $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ est un ensemble totalement ordonné, le contraire induirait $q' \leqslant q$, et donc $q' \in A$. Ainsi, ($\mathbf{C_2}$) entraîne ($\mathbf{C_2'}$).

Réciproquement, si la condition ($\mathbf{C_2'}$) est satisfaite, alors, pour tout $q \in A$ et chaque $q' \in \mathbb{Q}$ tel que $q' < q$, alors $q' \notin \mathbb{Q}\backslash A$, et donc $q' \in A$. D'où ($\mathbf{C_2'}$) induit ($\mathbf{C_2}$).

La notion de coupure vaut plus généralement pour les ensembles totalement ordonnés.

Définition 2.

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre totale $\leqslant$. Un couple (A, B) de parties de E est appelé **coupure** de E si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

(1) Les sous-ensembles A et B forment une partition de E.

(2) Si $a \in A$ et $b \in B$, alors $a < b$.

(3) Le sous-ensemble A n'a pas de plus petit élément.

La première composante A d'une coupure (A, B) est dite **majeure**, tandis que la seconde B est dite **résiduelle**.

Nous rappelons que la condition **(1)** de la définition 2 ci-dessus est équivalente à la conjonction des trois assertions suivantes :

(1a) $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$.
(1b) $A \cap B = \emptyset$.
(1c) $A \cup B = E$.

De ce fait, si (A, B) est une coupure de E, alors $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$, puis $B = E \backslash A$. Par conséquent, toute coupure de E est définie par sa composante majeure.

> Nous pouvons donc identifier toute coupure à sa composante majeure. En raison de cette identification, les définitions 1 et 2 sont équivalentes pour $E = \mathbb{Q}$.

Dans la suite de ce texte, nous considérons la définition 1.

2. La typologie des coupures de Dedekind

Dans cette section, nous allons voir que les coupures de $\mathbb{Q}$ peuvent être classées en deux catégories.

2.1. Coupures du premier type

D'entrée de jeu, nous dévoilons la forme explicite des éléments d'une première famille de coupures.

Proposition 1.

Soit $q \in \mathbb{Q}$. Alors, l'ensemble $A_q = \left\{p \in \mathbb{Q} \ : \ p < q\right\}$ est une coupure de $\mathbb{Q}$.

Démonstration :

($\mathbf{C_1}$) Il est clair que $q - 1 \in \mathbb{Q}$ et $q - 1 < q$. Donc, $q - 1 \in A_q$. Par conséquent, $A_q \neq \emptyset$. Cependant, $q \notin A_q$. Ainsi, $A_q \neq \mathbb{Q}$.

($\mathbf{C_2}$) Soit $p \in A_q$. Alors, par définition, $p < q$. Si p' est un nombre rationnel vérifiant $p' < p$, alors, par transitivité de l'ordre strict $<$ sur $\mathbb{Q}$, nous obtenons $p' < q$, et donc $p' \in A_q$. Ainsi, pour tout $p \in A_q$ et quel que soit $p' \in \mathbb{Q}$, la relation $p' < p$ implique $p' \in A_q$.

($\mathbf{C_3}$) Soit $p \in A_q$. Alors, $p < q$. De ce fait, $q - p$ est un nombre rationnel strictement positif. Il existe donc un couple (a, b) d'entiers naturels non nuls tels que $q - p = \frac{a}{b}$. Nous posons $p' = p + \frac{a}{b+1}$. Alors, $p' \in \mathbb{Q}$ et $p < p'$, puis

$$p' = p + \frac{a}{b+1} < p + \frac{a}{b} = p + (q - p) = q.$$

D'où $p' \in A_q$ et $p < p'$. Par suite, pour tout $p \in A_q$, il existe un $p' \in A_q$ tel que $p < p'$. $\square$

Les coupures de la forme A_q, où $q \in \mathbb{Q}$, sont dites du **premier type**.

En vertu de la condition $(\mathbf{C_2})$ de la définition 1, toute coupure de $\mathbb{Q}$ est majorée. Précisément, les majorants d'une coupure A sont les éléments de $\mathbb{Q} \backslash A$.

Les coupures du premier type présentées ci-dessus admettent-elles chacune une borne supérieure ? Le résultat suivant répond à cette question par l'affirmative.

Proposition 2.

Une A coupure de $\mathbb{Q}$ admet une borne supérieure $q \in \mathbb{Q}$ si, et seulement si, $A = A_q$.

Démonstration :

Soit A une coupure de $\mathbb{Q}$ admettant une borne supérieure $q \in \mathbb{Q}$. Alors, $p \leqslant q$ pour chaque $p \in A$. Mieux, $p < q$ pour tout $p \in A$; autrement q serait le plus grand élément de A. Ainsi, $A \subset A_q$. Pour démontrer l'inclusion réciproque, nous considérons un nombre rationnel $p < q$. Alors, il existe un $p' \in A$ tel que $p < p' < q$; le contraire induirait que p est un majorant de A strictement inférieur à q. En vertu de la condition $(\mathbf{C_2})$ de la définition 1, l'inégalité $p < p'$ entraîne $p \in A$. D'où $A_q \subset A$.

Soit $q \in \mathbb{Q}$. Alors, par définition, q est un majorant de A_q. Maintenant, soit m un autre majorant de A_q. Nous supposons que $m < q$. Alors, d'après la condition $(\mathbf{C_3})$, il existe un $q' \in A_q$ tel que $m < q' < q$: une contradiction, car m est un majorant de A_q. La supposition est donc fausse. Autrement dit, $q \leqslant m$. De ce fait, q est le plus petit majorant de A_q. $\square$

En réalité, la proposition 2 ainsi démontrée affirme que les seules coupures admettant une borne supérieure sont celles du premier type.

2.2. Coupures du second type – Existence de nombres irrationnels

La question de l'existence de coupures de $\mathbb{Q}$ n'admettant pas de borne supérieure se pose. Le résultat suivant y répond.

Proposition 3.

L'ensemble $A_{\sqrt{2}} = \left\{p \in \mathbb{Q} \ : \ p < 0 \vee p^2 < 2\right\}$ est une coupure de $\mathbb{Q}$ et $A_{\sqrt{2}} \neq A_q$ pour chaque $q \in \mathbb{Q}$.

Démonstration :

$(\mathbf{C_1})$ Nous avons $0^2 < 2$ et $2^2 = 4 > 4$. De ce fait, $0 \in A_{\sqrt{2}}$ et $2 \notin A_{\sqrt{2}}$. Par conséquent, $A_{\sqrt{2}} \neq \emptyset$ et $A_{\sqrt{2}} \neq \mathbb{Q}$.

($\mathbf{C_2}$) Soit $p \in A_{\sqrt{2}}$ et $p' \in \mathbb{Q}$ tel que $p' < p$. Si $p' \leqslant 0$, alors $p' \in A_{\sqrt{2}}$, par définition de $A_{\sqrt{2}}$. Si en revanche $p' > 0$, alors $0 < p' < p$, et donc $(p')^2 < p^2 < 2$; d'où $p' \in A_{\sqrt{2}}$. De ce fait, pour tout $p \in A_{\sqrt{2}}$ et quel que soit $p' \in \mathbb{Q}$, la relation $p' < p$ entraîne $p' \in A_{\sqrt{2}}$.

($\mathbf{C_3}$) Soit $p \in A_{\sqrt{2}}$. Nous posons

$$p' = \frac{p(p^2+6)}{3p^2+2}.$$

Alors, $p' \in \mathbb{Q}$. Par ailleurs,

$$(p')^2 - 2 = \frac{p^2(p^2+6)^2 - 2(3p^2+2)^2}{(3p^2+2)^2} = \frac{p^6 - 6p^4 + 12p^2 - 8}{(3p^2+2)^2} = \frac{(p^2-2)^3}{(3p^2+2)^2} < 0$$

et

$$p - p' = \frac{3p^3 + 2p - p^3 - 6p^2}{3p^2+2} = \frac{2p^3 - 4p}{3p^2+2} = \frac{2p(p^2-2)}{3p^2+2} < 0.$$

Ainsi, $p' \in A_{\sqrt{2}}$ et $p < p'$. Donc, pour tout $p \in A_{\sqrt{2}}$, il existe un $p' \in A_{\sqrt{2}}$ tel que $p < p'$.

Par conséquent, l'ensemble $A_{\sqrt{2}}$ est une coupure de $\mathbb{Q}$.

Nous supposons à présent qu'il existe un $q \in \mathbb{Q}$ tel que $A_{\sqrt{2}} = A_q$. Alors, $0 < q$ et $q^2 \geqslant 2$; le contraire induirait en effet $q \in A_{\sqrt{2}} = A_q$, et donc $q < q$. De ce fait,

$$x = \frac{q(q^2+6)}{3q^2+2}$$

est un nombre rationnel strictement positif. Cependant,

$$x^2 - 2 = \frac{(q^2-2)^3}{3q^2+2} \geqslant 0$$

et

$$q - x = \frac{2q(q^2-2)}{3q^2+2} \geqslant 0.$$

Donc, $x \leqslant q$ et $x^2 \geqslant 2$. Cette dernière inégalité, compte tenu du fait que $x > 0$, entraîne $x \notin A_{\sqrt{2}} = A_q$. D'où $q \leqslant x$. Il en résulte que $x = q$, c'est-à-dire $\frac{q(q^2+6)}{3q^2+2} = q$. Ceci induit $\frac{q^2+6}{3q^2+2} = 1$, puis $q^2 = 2$. Du reste, puisque q est un rationnel strictement positif, il existe des entiers naturels non nuls a et b, premiers entre eux, tels que $q = \frac{a}{b}$. Par conséquent, $\frac{a^2}{b^2} = 2$, c'est-à-dire $a^2 = 2b^2$. Par suite, 2 divise a. Il existe donc un entier k tel que $a = 2k$. D'où $4k^2 = 2b^2$, c'est-à-dire $b^2 = 2k^2$. Ceci induit que 2 divise b : une contradiction, car a et b sont premiers entre eux. La supposition de l'existence d'un nombre rationnel q vérifiant $A_{\sqrt{2}} = A_q$ est donc fausse. En d'autres termes, $A_{\sqrt{2}} \neq A_q$ pour chaque $q \in \mathbb{Q}$. $\square$

> Une coupure de $\mathbb{Q}$ n'admettant pas borne supérieure est dite du **second type**.

3. L'ordre sur l'ensemble des nombres réels

L'ordre du corps $\mathbb{Q}$ se prolonge de manière avantageuse à l'ensemble $\mathbb{R}$ de ses coupures.

3.1. Définition de la relation d'ordre et présentation de ses attributs

Proposition 4.

La relation binaire $\leqslant_{\mathbb{R}}$, définie sur $\mathbb{R}$ par $A \leqslant_{\mathbb{R}} B$ si $A \subset B$, est une relation d'ordre totale.

Démonstration :

Nous savons que l'inclusion définit une relation d'ordre sur l'ensemble $\mathscr{P}(\mathbb{Q})$ des parties de $\mathbb{Q}$. L'ensemble $\mathbb{R}$ des coupures de $\mathbb{Q}$ étant une partie de $\mathscr{P}(\mathbb{Q})$, la relation $\subset$ est également une relation d'ordre $\mathbb{R}$. Autrement dit, la relation binaire $\leqslant_{\mathbb{R}}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Nous allons montrer que cet ordre est total. À cet effet, nous considérons deux coupures A et B de $\mathbb{Q}$ telles que $A \not\subset B$. Alors, il existe un $q \in A$ tel que $q \notin B$. Compte tenu de la condition $(\mathbf{C_2})$, il en résulte que $p < q$ pour tout $p \in B$, et donc $p \in A$ pour tout $p \in B$. D'où $B \subset A$. Ainsi, pour tout couple $(A, B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, nous avons $A \leqslant_{\mathbb{R}} B$ ou $B \leqslant_{\mathbb{R}} A$. $\square$

Comme de coutume, la relation d'**ordre strict** $<_{\mathbb{R}}$ est définie par $A <_{\mathbb{R}} B$ si $A \leqslant_{\mathbb{R}} B$ et $A \neq B$.

Proposition 5.

Soient q et q' des nombres rationnels. Alors, $q \leqslant q'$ si, et seulement si, $A_q \leqslant_{\mathbb{R}} A_{q'}$.

Démonstration :

Nous supposons que $q \leqslant q'$. Alors, par transitivité, pour tout $x \in \mathbb{Q}$, l'inégalité $x < q$ entraîne $x < q'$. Ainsi, $\{x \in \mathbb{Q} \ : \ x < q\} \subset \{x \in \mathbb{Q} \ : \ x < q'\}$, c'est-à-dire $A_q \subset A_{q'}$ ou $A_q \leqslant_{\mathbb{R}} A_{q'}$.

Réciproquement, nous supposons que $A_q \leqslant_{\mathbb{R}} A_{q'}$, c'est-à-dire $A_q \subset A_{q'}$. Alors, $x < q'$ pour chaque $x \in A_q$. Donc, q' est un majorant de A_q. Cependant, q est le plus petit majorant de A_q, d'après la proposition 4. D'où $q \leqslant q'$. $\square$

Maintenant, nous considérons l'application

$$\Phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \ \ q \mapsto A_q.$$

Alors, pour des nombres rationnels q et q', l'égalité $\Phi(q) = \Phi(q')$, c'est-à-dire $A_q = A_{q'}$, entraîne $q = q'$. Donc, Φ est une application **injective**. Toutefois, elle n'est **pas surjective**, en vertu de la proposition 3 à la page 4.

Du reste, l'application Φ est *compatible* avec les relations d'ordre $\leqslant$ et $\leqslant_{\mathbb{R}}$. En d'autres termes, $q \leqslant q'$ dans $\mathbb{Q}$ si, et seulement si, $\Phi(q) \leqslant_{\mathbb{R}} \Phi(q')$ (voir la proposition 5).

✍

Compte tenu de l'application Φ et sa compatibilité avec les ordres respectifs de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, nous pouvons, sans préjudice, **identifier** chaque nombre rationnel q avec la coupure A_q dont il est la borne supérieure. Par cette identification, $\mathbb{Q}$ est un sous-ensemble propre de $\mathbb{R}$, et $\leqslant_{\mathbb{R}}$ est un prolongement de la relation d'ordre de $\leqslant$ sur $\mathbb{Q}$.

L'ensemble $\mathbb{R}$ est donc constitué des nombres **rationnels** (les coupures du *premier type*) et des nombres **irrationnels** (les coupures du *second type*).

3.2. Sur la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\leqslant$. Une partie D de E est dite **dense** dans E lorsque, pour toute couple (x, y) d'éléments de E vérifiant $x < y$, il existe un élément $d \in D$ tel que $x < d < y$.

Proposition 6.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration :

Soient B et B' des nombres réels vérifiant $B <_{\mathbb{R}} B'$, c'est-à-dire $B \subset B'$ et $B \neq B'$. Il existe donc un nombre rationnel p tel que $p \in B'$ et $p \notin B$. Soit $x \in B$. Alors, $x < p$; en effet, le contraire, c'est-à-dire $p \leqslant x$, induirait $p \in B$, compte tenu de la condition $(\mathbf{C_2})$ (voir la définition 1 à la page 2). Ainsi, $x < p$ pour chaque $x \in B$. Ceci signifie que

$$B \subset \Big\{ r \in \mathbb{Q} \ : \ r < p \Big\} = A_p.$$

Autrement dit, $B \leqslant_{\mathbb{R}} A_p$. En outre, puisque $p \in B'$, la condition $(\mathbf{C_2})$ évoquée ci-dessus entraîne $x \in B'$ pour chaque rationnel x vérifiant $x < p$. Donc, $A_p \subset B'$. Cependant, $A_p \neq B'$, car $p \in B'$ et $p \notin A_p$. D'où $A_p <_{\mathbb{R}} B'$. Tout compte fait, $B \leqslant_{\mathbb{R}} A_p <_{\mathbb{R}} B'$.

Premier cas : Soit $B <_{\mathbb{R}} A_p$. Alors, $B <_{\mathbb{R}} A_p <_{\mathbb{R}} B'$.

Second cas : Soit $B = A_p$. Puisque $p \in B'$, d'après la condition $(\mathbf{C_3})$ (voir la définition 1 à la page 2), il existe un nombre rationnel $q \in B'$ tel que $p < q$. Alors, $A_p < A_q$. Cependant, comme nous l'avons montré précédemment, $q \in B'$ entraîne $A_q \subset B'$ et $A_q \neq B'$, c'est-à-dire $A_q <_{\mathbb{R}} B'$. Par suite, $B = A_p <_{\mathbb{R}} A_q <_{\mathbb{R}} B'$.

En tout état de cause, pour tout couple de réels (B, B') vérifiant $B <_{\mathbb{R}} B'$, il existe un nombre rationnel q tel que $B <_{\mathbb{R}} A_q <_{\mathbb{R}} B'$, c'est-à-dire $B <_{\mathbb{R}} q <_{\mathbb{R}} B'$. La densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est ainsi démontrée. $\square$

3.3. Théorème de la borne supérieure

Il y a des parties bornées de $\mathbb{Q}$ qui n'admettent pas de borne supérieure. C'est le cas notamment de la coupure $A_{\sqrt{2}}$, comme nous l'avons vu à la section 2.2. L'ensemble ordonné $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ est donc « *incomplet* ». En revanche, l'ensemble ordonné $(\mathbb{R}, \leqslant_{\mathbb{R}})$ est « *complet* », comme nous le verrons dans cette section.

Proposition 7.

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Démonstration :

Soit $\mathcal{F}$ une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Alors, $\mathcal{F}$ est une famille non vide de coupures de $\mathbb{Q}$. De ce fait, $B = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$ est une partie de $\mathbb{Q}$. Nous allons montrer que B est le plus petit majorant de $\mathcal{F}$.

B est une coupure de $\mathbb{Q}$

($\mathbf{C_1}$) En tant que réunion non vide de parties non vides, B est une partie non vide de $\mathbb{Q}$. Du reste, il existe une coupure B' de $\mathbb{Q}$ telle que $A \leqslant_{\mathbb{R}} B'$, c'est-à-dire $A \subset B'$, pour tout $A \in \mathcal{F}$. Donc, $B = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A \subset B'$. Ceci entraîne $B \neq \mathbb{Q}$, car $B' \neq \mathbb{Q}$.

($\mathbf{C_2}$) Soit $q \in B$ et $q' \in \mathbb{Q}$. Alors, il existe une coupure $A \in \mathcal{F}$ telle que $q \in A$. Si $q' < q$, alors $q' \in A$, et donc $q' \in B$. Ainsi, quel que soit le couple $(q, q') \in B \times \mathbb{Q}$, l'inégalité $q' < q$ entraîne $q' \in B$.

($\mathbf{C_3}$) Soit $q \in B$. Alors, il existe une coupure $A \in \mathcal{F}$ telle que $q \in A$. Ceci induit l'existence d'un $q' \in A \subset B$ vérifiant $q < q'$. Donc, pour tout $q \in B$, il existe un $q' \in B$ tel que $q < q'$.

B est un majorant de $\mathcal{F}$

Par définition, $A \subset B$ pour chaque $A \in \mathcal{F}$. En d'autres termes, $A \leqslant_{\mathbb{R}} B$ pour tout $A \in \mathcal{F}$.

B est plus petit majorant de $\mathcal{F}$

Soit B' un majorant de $\mathcal{F}$. Alors, $A \leqslant_{\mathbb{R}} B'$, c'est-à-dire $A \subset B'$, pour tout $A \in \mathcal{F}$. D'où $B = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A \subset B'$. Il en résulte que $B \leqslant_{\mathbb{R}} B'$ pour chaque majorant B' de $\mathcal{F}$. $\square$

4. Le groupe additif des nombres réels

Nous rappelons que l'ensemble $\mathbb{Q}$, muni de l'addition, est un groupe abélien. Cette addition sur $\mathbb{Q}$ se prolonge de manière harmonieuse à l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Dans cette section, nous donnons les modalités et les conséquences de ce prolongement.

4.1. Addition sur l'ensemble des nombres réels

Le procédé permettant de prolonger l'addition sur l'ensemble des nombres rationnels à l'ensemble des nombres réels est défini ci-dessous.

Proposition 8.

Soient A et B deux coupures de $\mathbb{Q}$. Alors, l'ensemble

$$\Big\{a+b \;:\; (a,b) \in A \times B\Big\},$$

symbolisé par $A +_{\mathbb{R}} B$, est une coupure de $\mathbb{Q}$.

Démonstration :

$(\mathbf{C_1})$ Selon la définition des coupures, il existe des nombres rationnels $a \in A$ et $b \in B$. Alors, leur somme $a+b$ appartient à $A +_{\mathbb{R}} B$. Donc, $A +_{\mathbb{R}} B \neq \emptyset$. Cependant, il existe des nombres $p \in \mathbb{Q}\backslash A$ et $q \in \mathbb{Q}\backslash B$. Pour tout couple $(x,y) \in A \times B$, nous avons alors $x < p$ et $y < q$, puis $x + y < p + q$. Ainsi, tout élément de $A +_{\mathbb{R}} B$ est strictement inférieur à $p+q$. Ceci entraîne $p + q \notin A +_{\mathbb{R}} B$, et donc $A +_{\mathbb{R}} B \neq \mathbb{Q}$.

$(\mathbf{C_2})$ Soit $x \in A +_{\mathbb{R}} B$ et $q \in \mathbb{Q}$ vérifiant $q < x$. Alors, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tel que $x = a + b$. De ce fait, $q < a + b$, c'est-à-dire $q - a < b$. Puisque B est une coupure de $\mathbb{Q}$, il en résulte que $q - a \in B$. Par conséquent, $q = a + (q-a) \in A +_{\mathbb{R}} B$.

$(\mathbf{C_3})$ Soit $x \in A +_{\mathbb{R}} B$. Alors, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tel que $x = a + b$. Du reste, il existe $a' \in A$ et $b' \in B$ vérifiant $a < a'$ et $b < b'$. Ainsi, $x' = a' + b' \in A +_{\mathbb{R}} B$ et $x = a + b < a' + b' = x'$. Donc, pour chaque $x \in A +_{\mathbb{R}} B$, il existe un $x' \in A +_{\mathbb{R}} B$ tel que $x < x'$. □

L'addition ainsi définie conserve les coupures du premier type. Autrement dit, l'addition de deux coupures du premier type est encore une coupure du premier type. Le résultat suivant précise ce principe.

Proposition 9.

Pour chaque couple $(p,q) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, nous avons $A_p +_{\mathbb{R}} A_q = A_{p+q}$.

Démonstration :

Soit $x \in A_p +_{\mathbb{R}} A_q$. Alors, $x = a + b$, où $a \in A_p$ et $b \in A_q$, c'est-à-dire $a < p$ et $b < q$. De ce fait, $x = a + b < p + q$, et donc $x \in A_{p+q}$. Par suite, $A_p +_{\mathbb{R}} A_q \subset A_{p+q}$.

À présent, soit $x \in A_{p+q}$. Alors, $x < p + q$. D'où $x - p < q$, c'est-à-dire $x - p \in A_q$. Cependant, en qualité de coupure de $\mathbb{Q}$, A_q n'admet pas de plus grand élément. Il existe donc un $c \in A_q$ tel que $x - p < c$. Il en résulte que $x - c < p$, c'est-à-dire $x - c \in A_p$. De ce fait, $x = (x-c) + c \in A_p +_{\mathbb{R}} A_q$. Par conséquent, $A_{p+q} \subset A_p +_{\mathbb{R}} A_q$. □

✍

D'après la proposition 9 ci-dessus, quels que soient p et q dans $\mathbb{Q}$, nous avons

$$\Phi(p+q) = \Phi(p) +_{\mathbb{R}} \Phi(q),$$

où

$$\Phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \quad q \mapsto A_q.$$

De ce fait, l'addition $+_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}$ est un prolongement de l'addition $+$ sur $\mathbb{Q}$, car chaque rationnel q est identifié à la coupure du premier type A_q.

4.2. Commutativité, associativité et existence d'un élément neutre

Certaines propriétés de l'addition $+$ sur l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels se transmettent à son prolongement $+_{\mathbb{R}}$ sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Proposition 10.

La loi $+_{\mathbb{R}}$ définie ci-dessus est commutative et associative. De plus, la coupure

$$A_0 = \Big\{ p \in \mathbb{Q} \ : \ p < 0 \Big\},$$

encore symbolisée par $0_{\mathbb{R}}$, est neutre pour la loi $+_{\mathbb{R}}$.

Démonstration :

Associativité. Soient A et B deux coupures de $\mathbb{Q}$. Alors,

$$A +_{\mathbb{R}} B = \Big\{ a+b \ : \ (a,b) \in A \times B \Big\} \qquad \text{et} \qquad B +_{\mathbb{R}} A = \Big\{ b+a \ : \ (a,b) \in A \times B \Big\}.$$

Or, l'addition $+$ sur $\mathbb{Q}$ est commutative. Donc, $a+b = b+a$ pour tout $(a,b) \in A \times B$. De ce fait, $A +_{\mathbb{R}} B = B +_{\mathbb{R}} A$.

Commutativité. Soient A, B et C des coupures de $\mathbb{Q}$. Alors,

$$(A +_{\mathbb{R}} B) +_{\mathbb{R}} C = \Big\{ (a+b)+c \ : \ (a,b,c) \in A \times B \times C \Big\}$$

et

$$A +_{\mathbb{R}} (B +_{\mathbb{R}} C) = \Big\{ a+(b+c) \ : \ (a,b,c) \in A \times B \times C \Big\}.$$

Puisque l'addition $+$ sur $\mathbb{Q}$ est associative, nous avons $(a+b)+c = a+(b+c)$ pour tout $(a,b,c) \in A \times B \times C$. Il en résulte que $(A +_{\mathbb{R}} B) +_{\mathbb{R}} C = A +_{\mathbb{R}} (B +_{\mathbb{R}} C)$.

Neutralité de A_0. Soit A une coupure de $\mathbb{Q}$. Nous considérons un élément x de $A +_{\mathbb{R}} A_0$. Alors, il existe un $a \in A$ et un rationnel $q < 0$ tels que $x = a+q$. Donc, $x = a+q < a$. Ceci induit $x \in A$, en vertu de la condition $(\mathbf{C_2})$. Donc, $A +_{\mathbb{R}} A_0 \subset A$. Pour montrer l'inclusion réciproque, soit $a \in A$. Alors, il existe un $a' \in A$ tel que $a < a'$. De ce fait, $a - a' < 0$, c'est-à-dire $a - a' \in A_0$. D'où $a = a' + (a-a') \in A +_{\mathbb{R}} A_0$. Ainsi, $A \subset A +_{\mathbb{R}} A_0$. Par conséquent, $A +_{\mathbb{R}} A_0 = A$, puis $A +_{\mathbb{R}} A_0 = A = A_0 +_{\mathbb{R}} A$, car la loi $+_{\mathbb{R}}$ est commutative. □

4.3. Opposé d'un réel pour l'addition

Dans cette section, nous démontrons que chaque nombre réel est inversible pour l'addition.

Proposition 11.

Pour toute coupure A de $\mathbb{Q}$, l'ensemble

$$-A = \Big\{q \in \mathbb{Q} \ : \ (\exists p \in \mathbb{Q})(p > q \ \wedge \ -p \notin A)\Big\}$$

est également une coupure de $\mathbb{Q}$.

Démonstration :

($\mathbf{C_1}$) Il existe un nombre rationnel a tel que $a > 0$ et $a \notin A$; en effet, le contraire induirait $A = \mathbb{Q}$. Nous posons $q = -a - 1$ et $p = -a$. Alors, $-a - 1 = p - 1 < p$ et $-p = a$. D'où $q < p$ et $-p \notin A$. Ceci signifie que $q \in -A$. Donc, $-A \neq \emptyset$. Maintenant, soit $x \in A$ et $p \in \mathbb{Q}$. Si $-p \notin A$, alors $x < -p$, c'est-à-dire $-x > p$. Donc, pour tout $p \in \mathbb{Q}$, nous avons $-x > p$ ou $-p \in A$. De ce fait, $-x \notin -A$. Par conséquent, $-A \neq \mathbb{Q}$.

($\mathbf{C_2}$) Soit $q \in -A$ et $q' \in \mathbb{Q}$ tel que $q' < q$. Alors, il existe un $p \in \mathbb{Q}$ satisfaisant $q < p$ et $-p \notin A$. D'où $q' < p$ et $-p \notin A$. Ceci induit $q' \in -A$. Donc, pour tout $q \in -A$ et chaque $q' \in \mathbb{Q}$ vérifiant $q' < q$, nous avons $q' \in -A$.

($\mathbf{C_3}$) Soit $q \in -A$. Alors, il existe un $p \in \mathbb{Q}$ tel que $q < p$ et $-p \notin A$. Donc, $q \in A_p$. Puisque A_p est un coupure de $\mathbb{Q}$, il existe un $q' \in A_p$ satisfaisant $q < q'$. Ce nombre q' appartient à $-A$, car $q' < p$ et $-p \notin A$. Ainsi, pour chaque $q \in -A$, il existe un $q' \in -A$ tel que $q < q'$. □

La coupure $-A$ est appelée **opposé** de A. En distinguant les coupures du premier type de celles du second type, nous obtenons des expressions plus explicites de $-A$.

Proposition 12.

(1) Si A est une coupure de $\mathbb{Q}$ du premier type, alors $-A$ est également une coupure du premier type. Précisément, $-A_q = A_{-q}$ pour tout nombre rationnel q.

(2) Si A est une coupure de $\mathbb{Q}$ du second type, alors

$$-A = \Big\{x \in \mathbb{Q} \ : \ -x \notin A\Big\}.$$

Démonstration :

(1) Soit $q \in \mathbb{Q}$. Par ailleurs, soit $x \in -A_q$. Alors, il existe un $p \in \mathbb{Q}$ tel que $x < p$ et $-p \notin A_q$, c'est-à-dire $-p \in \mathbb{Q}\backslash A_q$. Cependant, $\mathbb{Q}\backslash A_q = \big\{y \in \mathbb{Q} \ : \ q \leqslant y\big\}$. De ce fait, $q \leqslant -p$, c'est-à-dire $p \leqslant -q$. Puisque $x < p$, il en résulte que $x < -q$. Ainsi, $-A_q \subset A_{-q}$.

Pour établir l'inclusion réciproque, soit $x \in A_{-q}$. Alors, $x < -q$. Alors, il existe un $p \in \mathbb{Q}$ tel que $x < p < -q$, car A_{-q} est une coupure de $\mathbb{Q}$. Donc, $x < p$ et $q < -p$. D'où $x < p$ et $-p \notin A_q$. Par suite, $x \in -A_q$. Ceci entraîne $A_{-q} \subset -A_q$.

(2) Soit A une coupure de $\mathbb{Q}$ du second type. Du reste, soit $x \in -A$. Alors, il existe un nombre rationnel p tel que $x < p$ et $-p \notin A$, c'est-à-dire $-p < -x$ et $-p \notin -A$. Ceci entraîne $-x \notin A$; en effet, le contraire induirait $-p \in A$. De ce fait, $-A \subset \big\{x \in \mathbb{Q} \ : \ -x \notin A\big\}$.

Pour prouver l'inclusion réciproque, nous considérons un nombre rationnel x vérifiant $-x \notin A$, c'est-à-dire $-x \in \mathbb{Q}\backslash A$. Cependant, la coupure A étant du second type, elle n'admet pas de borne supérieure (voir la proposition 2 à la page 4). Donc, $\mathbb{Q}\backslash A$, l'ensemble des majorants de A, n'a pas de plus petit élément. De ce fait, il existe un $q \in \mathbb{Q}\backslash A$ tel que $q < -x$, c'est-à-dire $x < -q$. En posant $p = -q$, nous obtenons alors $x < p$ et $-p \notin A$. D'où $x \in -A$. Par conséquent, $\big\{x \in \mathbb{Q} \ : \ -x \notin A\big\} \subset -A$. □

Maintenant, nous allons montrer que l'opposé de toute coupure est son inverse pour l'addition $+_{\mathbb{R}}$.

Dans notre argumentation, nous allons utiliser le fait que le groupe abélien ordonné $(\mathbb{Q}, +, \leqslant)$ est **archimèdien** ; autrement dit :

> Quels que soient les nombres rationnels a et b, si $0 < a \leqslant b$, alors il existe un entier naturel n tel que $b < na$.

Nous allons également mettre à contribution le fait que chaque sous-ensemble non vide et majorée de $\mathbb{N}$ possède un *plus grand élément.*

Proposition 13.

Pour toute coupure A de $\mathbb{Q}$, nous avons $A +_{\mathbb{R}} (-A) = 0_{\mathbb{R}} = (-A) +_{\mathbb{R}} A$.

Démonstration :

Puisque la loi $+_{\mathbb{R}}$ est commutative, il suffit de montrer que $A +_{\mathbb{R}} (-A) = 0_{\mathbb{R}}$.

Tout d'abord, nous supposons que A est une coupure de $\mathbb{Q}$ du premier type. Alors, il existe un rationnel q tel que $A = A_q$. En vertu de la proposition 12**(1)** et de la proposition 9 à la page 9, il résulte que

$$A +_{\mathbb{R}} (-A) = A_q +_{\mathbb{R}} A_{-q} = A_{q+(-q)} = A_0 = 0_{\mathbb{R}}.$$

Dans toute la suite de cette démonstration, A est une coupure de $\mathbb{Q}$ du second type.

Soit $x \in A +_{\mathbb{R}} (-A)$. Alors, il existe des nombres rationnels $a \in A$ et $b \in -A$ tels que $x = a + b$. Compte tenu de la proposition 12**(2)**, l'appartenance de b à $-A$ induit $-b \notin A$. Ceci entraîne $a < -b$; le contraire induirait en effet $-b \in A$. De ce fait, $x = a + b < 0$. Par conséquent, $x \in A_0$. D'où $A +_{\mathbb{R}} (-A) \subset A_0$.

Réciproquement, soit $x \in A_0$, c'est-à-dire $x < 0$. Pour montrer que $x \in A +_{\mathbb{R}} (-A)$, nous allons distinguer deux cas.

Premier cas : Soit $0 \in A$. Alors, l'ensemble

$$E = \Big\{ n \in \mathbb{N} \ : \ -nx \in A \Big\}$$

contient 0. De plus, il existe un $y \notin A$ tel que $0 < y$. Puisque le groupe abélien ordonné $(\mathbb{Q}, +, \leqslant)$ est archimédien, il existe un entier naturel k tel que $y < k \cdot (-x)$. De ce fait, $k \notin E$, et k est un majorant de E. L'ensemble E admet par conséquent un plus grand élément m. Ainsi, $m+1 \notin E$. D'où $-mx \in A$ et $-(m+1)x \notin A$. En vertu de la proposition 12**(2)**, il s'ensuit $-mx \in A$ et $(m+1)x \in -A$. Par suite,

$$x = -mx + (m+1)x \in A +_{\mathbb{R}} (-A).$$

Second cas : Soit $0 \notin A$. Alors, $0 \in -A$, selon la proposition 12**(2)**. De ce fait, en raisonnant comme dans le premier cas, nous déduisons que l'ensemble

$$F = \Big\{ n \in \mathbb{N} \ : \ nx \in -A \Big\}$$

est non vide et majoré. Il possède donc un plus grand élément. Soit $\ell = \max F$. Alors, $-\ell x \in -A$ et $-(\ell+1)x \notin -A$. Ceci signifie que $-\ell x \in -A$ et $(\ell+1)x \in A$. D'où

$$x = (\ell+1)x - \ell x \in A +_{\mathbb{R}} (-A).$$

En tout état de cause, $x \in A +_{\mathbb{R}} (-A)$. L'inclusion $A_0 \subset A +_{\mathbb{R}} (-A)$ est ainsi démontrée. Par conséquent, $A +_{\mathbb{R}} (-A) = A_0 = 0_{\mathbb{R}}$. □

✍

Tout compte fait, l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels, muni de l'addition $+_{\mathbb{R}}$, est un *groupe abélien.*

4.4. Compatibilité de la relation d'ordre avec l'addition

Dans cette section, nous montrons que la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$, introduite à la section 3, est compatible avec l'addition sur $\mathbb{R}$, définie à la section 4.

Proposition 14.

(1) Quels que soient les réels A, B et C, la relation $A \leqslant_{\mathbb{R}} B$ est équivalente à $(A +_{\mathbb{R}} C) \leqslant_{\mathbb{R}} (B +_{\mathbb{R}} C)$.

(2) Quels que soient les réels A, B, C et D, si $A \leqslant_{\mathbb{R}} B$ et $C \leqslant_{\mathbb{R}} D$, alors

$$(A +_{\mathbb{R}} C) \leqslant_{\mathbb{R}} (B +_{\mathbb{R}} D).$$

Démonstration :

(1) Soient A, B et C des nombres réels. Nous supposons tout d'abord que $A \leqslant_{\mathbb{R}} B$, c'est-à-dire $A \subset B$. Soit $x \in A +_{\mathbb{R}} C$. Alors, $x = a + c$ avec $a \in A$ et $c \in C$. Cependant, $a \in B$, car $A \subset B$. De ce fait, $x \in B +_{\mathbb{R}} C$. Donc, $(A +_{\mathbb{R}} C) \subset (B +_{\mathbb{R}} C)$, c'est-à-dire $(A +_{\mathbb{R}} C) \leqslant_{\mathbb{R}} (B +_{\mathbb{R}} C)$. Ainsi, la relation $A \leqslant_{\mathbb{R}} B$ entraîne $(A +_{\mathbb{R}} C) \leqslant_{\mathbb{R}} (B +_{\mathbb{R}} C)$.

Maintenant, soit $(A +_{\mathbb{R}} C) \leqslant_{\mathbb{R}} (B +_{\mathbb{R}} C)$. Alors, d'après le paragraphe précédent,

$$\Big[(A +_{\mathbb{R}} C) +_{\mathbb{R}} (-C)\Big] \leqslant_{\mathbb{R}} \Big[(B +_{\mathbb{R}} C) +_{\mathbb{R}} (-C)\Big].$$

De plus, compte tenu de la proposition 10 à la page 10 et de la proposition 13 à la page 12,

$$(A +_{\mathbb{R}} C) +_{\mathbb{R}} (-C) = A +_{\mathbb{R}} \Big(C +_{\mathbb{R}} (-C)\Big) = A +_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}} = A$$

et

$$(B +_{\mathbb{R}} C) +_{\mathbb{R}} (-C) = B +_{\mathbb{R}} \Big(C +_{\mathbb{R}} (-C)\Big) = B +_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}} = B.$$

D'où $A \leqslant_{\mathbb{R}} B$.

(2) Soient A, B, C et D des nombres réels vérifiant les relations $A \leqslant_{\mathbb{R}} B$ et $C \leqslant_{\mathbb{R}} D$. Ces dernières entraînent respectivement $(A +_{\mathbb{R}} C) \leqslant_{\mathbb{R}} (B +_{\mathbb{R}} C)$ et $(C +_{\mathbb{R}} B) \leqslant_{\mathbb{R}} (D +_{\mathbb{R}} B)$, en raison de la proposition **(1)** établie ci-dessus. Donc,

$$(A +_{\mathbb{R}} C) \leqslant_{\mathbb{R}} (B +_{\mathbb{R}} C) \qquad \text{et} \qquad (B +_{\mathbb{R}} C) \leqslant_{\mathbb{R}} (B +_{\mathbb{R}} D),$$

car l'addition sur $\mathbb{R}$ est commutative. En vertu de la transitivité de la relation d'ordre $\leqslant_{\mathbb{R}}$, il s'ensuit $(A +_{\mathbb{R}} C) \leqslant_{\mathbb{R}} (B +_{\mathbb{R}} D)$. □

La **soustraction** est définie sur $\mathbb{R}$ par $A -_{\mathbb{R}} B = A +_{\mathbb{R}} (-B)$. Comme sur $\mathbb{Z}$ et sur $\mathbb{Q}$, cette loi permet d'exprimer autrement la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. En effet, selon la proposition 14**(1)**, la relation $A \leqslant_{\mathbb{R}} B$ est équivalente à $0_{\mathbb{R}} \leqslant_{\mathbb{R}} B + (-A)$, c'est-à-dire

$$0_{\mathbb{R}} \leqslant_{\mathbb{R}} B -_{\mathbb{R}} A.$$

De ce fait, en posant

$$\mathbb{R}_+ = \Big\{A \in \mathbb{R} \ : \ 0_{\mathbb{R}} \leqslant_{\mathbb{R}} A\Big\} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{R}_+^* = \Big\{A \in \mathbb{R} \ : \ 0_{\mathbb{R}} <_{\mathbb{R}} A\Big\},$$

puis

$$\mathbb{R}_- = \Big\{A \in \mathbb{R} \ : \ A \leqslant_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}}\Big\} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{R}_-^* = \Big\{A \in \mathbb{R} \ : \ A <_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}}\Big\},$$

nous obtenons les équivalences suivantes :

(1) $A \leqslant_{\mathbb{R}} B$ si, et seulement si, $B -_{\mathbb{R}} A \in \mathbb{R}_+$.

(2) $A <_{\mathbb{R}} B$ si, et seulement si, $B -_{\mathbb{R}} A \in \mathbb{R}_+^*$.

(3) $A \in \mathbb{R}_-$ si, et seulement si, $-A \in \mathbb{R}_+$.

(4) $A \in \mathbb{R}_-^*$ si, et seulement si, $-A \in \mathbb{R}_+^*$.

5. Multiplication sur l'ensemble des nombres réels

Soit $\mathbb{Q}_-^*$ l'ensemble des nombres rationnels négatifs, $\mathbb{Q}_-$ l'ensemble des nombres rationnels négatifs ou nuls, puis $\mathbb{Q}_+^*$ l'ensemble des nombres rationnels positifs et $\mathbb{Q}_+$ l'ensemble des nombres rationnels positifs ou nuls. En d'autres termes,

$$\mathbb{Q}_-^* = \Big\{q \in \mathbb{Q} \;:\; q < 0\Big\} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{Q}_- = \Big\{q \in \mathbb{Q} \;:\; q \leqslant 0\Big\},$$

puis

$$\mathbb{Q}_+^* = \Big\{q \in \mathbb{Q} \;:\; 0 < q\Big\} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{Q}_+ = \Big\{q \in \mathbb{Q} \;:\; 0 \leqslant q\Big\}.$$

Proposition 15.

Soient A et B deux coupures de $\mathbb{Q}$ vérifiant $0_{\mathbb{R}} \leqslant_{\mathbb{R}} A$ et $0_{\mathbb{R}} \leqslant_{\mathbb{R}} B$. Alors, l'ensemble

$$\mathbb{Q}_-^* \cup \Big\{a \cdot b \;:\; a \in A \cap \mathbb{Q}_+ \;\wedge\; b \in B \cap \mathbb{Q}_+\Big\},$$

noté $A \times_{\mathbb{R}} B$, est une coupure de $\mathbb{Q}$.

Démonstration :

($\mathbf{C_1}$) À l'évidence, $A \times_{\mathbb{R}} B \neq \emptyset$, car $\emptyset \neq \mathbb{Q}_-^* \subset A \times_{\mathbb{R}} B$. Par ailleurs, il existe des éléments p et q de $\mathbb{Q}_+^*$ tels que $p \notin A$ et $q \notin B$. Soit $a \in A \cap \mathbb{Q}_+$ et $b \in B \cap \mathbb{Q}_+$. Alors, $0 \leqslant a < p$ et $0 \leqslant b < q$, et donc $0 \leqslant ab < pq$. De ce fait, $pq \notin A \times_{\mathbb{R}} B$. Par suite, $A \times_{\mathbb{R}} B \neq \mathbb{Q}$.

($\mathbf{C_2}$) Soit $q \in A \times_{\mathbb{R}} B$ et $q' \in \mathbb{Q}$ vérifiant $q' < q$. Si $q' < 0$, alors $q' \in A \times_{\mathbb{R}} B$. Si en revanche $0 \leqslant q'$, alors $0 < q$, et donc il existe des rationnels $a \in A \cap \mathbb{Q}_+^*$ et $b \in B \cap \mathbb{Q}_+^*$ tels que $q = ab$; d'où $0 \leqslant q' < ab$, puis $0 \leqslant \frac{q'}{a} < b$; ceci entraîne $\frac{q'}{a} \in B \cap \mathbb{Q}_+$, et donc $q' = a \cdot \frac{q'}{a} \in A \times_{\mathbb{R}} B$.

($\mathbf{C_3}$) Soit $q \in A \times_{\mathbb{R}} B$. Alors, $q \in \mathbb{Q}_-^*$ ou $q \in \mathbb{Q}_+$. Tout d'abord, soit $q \in \mathbb{Q}_-^* = A_0$. Alors, il existe un $q' \in A_0 = \mathbb{Q}_-^*$ tel que $q < q'$. Maintenant, soit $q \in \mathbb{Q}_+$. Alors, il existe $a \in A \cap \mathbb{Q}_+$ et $b \in B \cap \mathbb{Q}_+$ vérifiant $q = ab$. Cependant, puisque A et B sont des coupures de $\mathbb{Q}$, il existe $a' \in A$ et $b' \in B$ tels que $a < a'$ et $b < b'$. Donc, en posant $q' = a'b'$, nous obtenons $q < q'$ et $q' \in A \times_{\mathbb{R}} B$. Par conséquent, pour chaque $q \in A \times_{\mathbb{R}} B$, il existe un élément q' de $A \times_{\mathbb{R}} B$ tel que $q < q'$. $\square$

Soient A et B des éléments de $\mathbb{R}_+$. Alors,

$$\Big\{a \cdot b \;:\; a \in A \cap \mathbb{Q}_+ \;\wedge\; b \in B \cap \mathbb{Q}_+\Big\} = \Big\{b \cdot a \;:\; b \in B \cap \mathbb{Q}_+ \;\wedge\; a \in A \cap \mathbb{Q}_+\Big\},$$

car la multiplication sur $\mathbb{Q}$ est commutative.

> Par conséquent, $A \times_{\mathbb{R}} B = B \times_{\mathbb{R}} A$, quels que soient A et B appartenant à $\mathbb{R}_+$.

Puisque $0_{\mathbb{R}} = A_0 = \mathbb{Q}_-^*$, nous avons $0_{\mathbb{R}} \cap \mathbb{Q}_+ = \emptyset$, puis

$$\Big\{a \cdot b \ : \ a \in A \cap \mathbb{Q}_+ \ \wedge \ b \in 0_{\mathbb{R}} \cap \mathbb{Q}_+\Big\} = \emptyset.$$

De ce fait, $0_{\mathbb{R}} \times_{\mathbb{R}} A = A \times_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}} = 0_{\mathbb{R}}$ pour chaque $A \in \mathbb{R}_+$.

La proposition 15 ci-dessus permet de définir la multiplication sur $\mathbb{R}$ par morceaux.

Définition 3.

La loi de composition $\times_{\mathbb{R}}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$A \times_{\mathbb{R}} B = \begin{cases} \mathbb{Q}_-^* \cup \Big\{a \cdot b \ : \ a \in A \cap \mathbb{Q}_+ \ \wedge \ b \in B \cap \mathbb{Q}_+\Big\} & \text{si } \ A \in \mathbb{R}_+ \ \text{ et } \ B \in \mathbb{R}_+, \\ -\Big((-A) \times_{\mathbb{R}} B\Big) & \text{si } \ A \in \mathbb{R}_-^* \ \text{ et } \ B \in \mathbb{R}_+, \\ -\Big(A \times_{\mathbb{R}} (-B)\Big) & \text{si } \ A \in \mathbb{R}_- \ \text{ et } \ B \in \mathbb{R}_+^*, \\ (-A) \times_{\mathbb{R}} (-B) & \text{si } \ A \in \mathbb{R}_-^* \ \text{ et } \ B \in \mathbb{R}_-^*, \end{cases}$$

est appelée **multiplication** sur $\mathbb{R}$.

La multiplication sur $\mathbb{R}$ a des propriétés qu'il convient de mentionner.

Proposition 16.

(1) La multiplication $\times_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}$ est commutative et associative.

(2) La coupure du premier type A_1 est élément neutre pour la multiplication $\times_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}$.

(3) Tout élément de $\mathbb{R}$, distinct de $0_{\mathbb{R}} = A_0$, est inversible pour la multiplication $\times_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}$.

(4) La multiplication $\times_{\mathbb{R}}$ est distributive à gauche et à droite par rapport à l'addition $+_{\mathbb{R}}$.

(5) $A_p \times_{\mathbb{R}} A_q = A_{pq}$ pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

La rédaction des preuves des divers points de cette proposition 16 est laissée au lecteur. Ce dernier est invité à comparer ses développements avec les démonstrations détaillées proposées dans l'ouvrage [4] référencé au pied de ce document.

✍

L'ensemble $\mathbb{R}$, muni de l'addition $+_{\mathbb{R}}$ et de l'addition $\times_{\mathbb{R}}$, est donc un corps commutatif.

6. Conclusion

Considérons à nouveau l'application injective

$$\Phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{R},\ \ q \mapsto A_q.$$

Alors, $\Phi(1)$ est l'élément neutre de $\mathbb{R}$ pour la multiplication $\times_{\mathbb{R}}$. Au demeurant, quels que soient les nombres rationnels p et q, nous avons

$$\Phi(p+q) = \Phi(p) +_{\mathbb{R}} \Phi(q) \qquad \text{et} \qquad \Phi(p \times q) = \Phi(p) \times_{\mathbb{R}} \Phi(q).$$

Du reste, si $p \leqslant q$, alors $\Phi(p) \leqslant_{\mathbb{R}} \Phi(q)$.

Donc, Φ est un morphisme injectif du corps $(\mathbb{Q}, +, \times)$ dans le corps $(\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}}, \times_{\mathbb{R}})$, compatible avec les ordres respectifs $\leqslant$ et $\leqslant_{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R}$.

Le morphisme injectif Φ permet d'identifier $\mathbb{Q}$ au sous-corps $\Phi(\mathbb{Q})$ des coupures du premier type. Ainsi, sans préjudice, nous remplaçons les symboles $+_{\mathbb{R}}$, $\times_{\mathbb{R}}$ et $\leqslant_{\mathbb{R}}$ par $+$, $\times$ et $\leqslant$, respectivement ; il s'ensuit $\mathbb{Q}$ est un **sous-corps** du **corps totalement ordonné** $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$.

Nous avons démontré que $\mathbb{Q}$ est *dense* dans $\mathbb{R}$ (voir la proposition 6 à la page 7).

Nous avons également vu qu'il existe des parties de $\mathbb{Q}$, non vides et majorées, n'admettant pas de borne supérieure (voir la proposition 3 à la page 4). En revanche, toute partie de $\mathbb{R}$, non vide et majorée, possède une borne supérieure (voir la proposition 7 à la page 8). Le corps totalement ordonné $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$ est par conséquent **complet**, tandis que le sous-corps $\mathbb{Q}$ est *incomplet*.

Références

[1] J.-M. Arnaudiès et H. Fraysse, **Cours de mathématiques**, Tome 2, Dunod Université, Paris, 1991.

[2] L. Chambadal et J.-L. Ovaert, **Cours de mathématiques**, Tome I, Gauthier-Villars, Paris, 1966.

[3] H. Heuser, **Lehrbuch der Analysis**, Teil 1, 15. durchgesehene Auflage, Teubner, Stuttgart, etc., 2003.

[4] C. V. Nguembou Tagne, **Discours formel sur les mathématiques pour le secondaire**, Volume I, Books on Demand, Paris, Norderstedt, 2018.

[5] C. V. Nguembou Tagne, **Du Point à l'espace : Introduction formelle à la géométrie euclidienne**, Books on Demand, Paris, Norderstedt, 2018.

[6] W. Rudin, **Principles of Mathematical Analysis**, Third edition, McGraw-Hill, New York, Tokyo, etc., 1976.