Le spectre de la composée de deux endomorphismes

Christian V. Nguembou Tagne

9 novembre 2021

Dans cette note, nous démontrons qu'en dimension finie, le *spectre* de la composée de deux endomorphismes ne dépend pas de l'ordre de composition. En d'autres termes, quels que soient les endomorphismes f et g d'un espace vectoriel de dimension finie, le spectre de $f \circ g$ est égal au spectre de $g \circ f$. Autrement dit, $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

Dans notre argumentation, nous allons mettre à contribution trois résultats que nous nous donnons la peine de démontrer à titre pédagogique.

1. Résultats préliminaires

Le premier résultat préliminaire que nous démontrons est bien connu. Il affirme qu'en dimension finie, pour les endomorphismes, les attributs suivants sont des synonymes : bijectif, injectif et surjectif.

Proposition 1.

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et f un endomorphisme de E. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) L'endomorphisme f est bijectif.

(ii) L'endomorphisme f est injectif.

(iii) L'endomorphisme f est surjectif.

Démonstration :

Par définition, (**i**) entraîne (**ii**).

(**ii**) $\Rightarrow$ (**iii**) : Soit l'endomorphisme f injectif. Alors, $\dim(\ker f) = 0$. D'après le *théorème du rang*, il en résulte que $\dim(E) = \mathrm{rg}(f)$, et donc $\mathrm{im}\, f = E$. Ceci signifie que l'endomorphisme f est surjectif.

(**iii**) $\Rightarrow$ (**i**) : Soit l'endomorphisme f surjectif. Alors, $\dim(E) = \mathrm{rg}(f)$. Ceci induit $\dim(\ker f) = 0$. De ce fait, $\ker f = \{0_E\}$. Ceci signifie que l'endomorphisme f est injectif, et donc bijectif. $\square$

Les endomorphismes non-bijectifs sont caractérisés par une valeur propre qu'ils ont en commun.

Proposition 2.

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Pour que 0 soit une valeur propre d'un endomorphisme de E, il faut et il suffit que cet endomorphisme ne soit pas bijectif.

Démonstration :

Nous supposons tout d'abord que 0 est une valeur propre d'un endomorphisme f de E. Alors, il existe un vecteur non nul u de E tel que $f(u) = 0$. D'où $\ker f \neq \{0_E\}$. Ceci signifie que l'endomorphisme f n'est pas injectif ; a fortiori, il n'est pas bijectif.

Maintenant, soit f un endomorphisme non-bijectif de E. Alors, f n'est pas injectif, d'après la proposition 1. De ce fait, le noyau de f n'est pas réduit au vecteur nul. Par conséquent, 0 est une valeur propre de f. □

Pour que la composée $f \circ g$ de deux applications soit bijective, il suffit que chacune des applications f et g soit bijective. Dans le cadre des endomorphismes d'espaces vectoriels de dimension finie, cette condition est nécessaire.

Proposition 3.

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. De plus, soient f et g deux endomorphismes de E. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Les endomorphismes f et g sont bijectifs.

(ii) L'endomorphisme $f \circ g$ est bijectif.

(iii) L'endomorphisme $g \circ f$ est bijectif.

Démonstration :

L'implication (**i**) $\Rightarrow$ (**ii**) se prouve sans grande difficulté.

(**ii**) $\Rightarrow$ (**i**) : Soit l'endomorphisme $f \circ g$ bijectif. Alors, g est injectif ; en effet, si u et u' sont des vecteurs de E vérifiant $g(u) = g(u')$, alors

$$(f \circ g)(u) = f\big(g(u)\big) = f\big(g(u')\big) = (f \circ g)(u'),$$

et donc $u = u'$. Du reste, f est surjectif ; car, pour tout $v \in E$, il existe un $u \in E$ tel que

$$v = (f \circ g)(u) = f\big(g(u)\big),$$

et donc $v \in \operatorname{im} f$. En vertu de la proposition 1, il en résulte que les endomorphismes f et g sont bijectifs.

L'équivalence entre (**i**) et (**iii**) se démontre de manière analogue. □

2. Le spectre de la composée de deux endomorphismes

Proposition 4.

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. Alors, les endomorphismes $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

Démonstration :

Soit λ un nombre réel. Nous allons montrer que λ est une valeur propre de $f \circ g$ si, et seulement si, λ est une valeur propre de $g \circ f$. À cet effet, nous allons distinguer deux cas.

Le cas où $\lambda \neq 0$

Nous supposons tout d'abord que λ est une valeur propre de $f \circ g$. Alors, il existe un vecteur non nul u de E tel que $(f \circ g)(u) = \lambda u$, c'est-à-dire $f\big(g(u)\big) = \lambda u$. Alors, le vecteur $v = g(u)$ est non nul ; en effet, le contraire induirait $\lambda u = f(0_E) = 0_E$ avec $\lambda \neq 0$ et $u \neq 0_E$: une contradiction. Cependant,

$$(g \circ f)(v) = (g \circ f)\big(g(u)\big) = g\big((f \circ g)(u)\big) = g(\lambda u) = \lambda g(u) = \lambda v.$$

De ce fait, λ est une valeur propre de $g \circ f$.

De manière analogue, nous montrons que, si le réel λ est une valeur propre de $g \circ f$, alors il est également une valeur propre de $f \circ g$.

Le cas où $\lambda = 0$

Pour que 0 soit une valeur propre de $f \circ g$, il faut et il suffit que l'endomorphisme $f \circ g$ ne soit pas bijectif (voir la proposition 2). Ceci équivaut à dire que $g \circ f$ n'est pas bijectif, compte tenu de la proposition 3. Par conséquent, 0 est une valeur propre de $f \circ g$ si, et seulement si, 0 est une valeur propre de $g \circ f$. $\square$