Magmas unifères, actions à gauche déduites et idempotence

Christian V. Nguembou Tagne

1^er janvier 2022

Dans cette note, nous présentons une condition suffisante pour que deux lois de composition internes sur un même ensemble, ayant chacune un élément neutre, soient idempotentes. Cette condition est la **distributivité mutuelle** des actions à gauche déduites de ces lois. Précisément, étant donné deux lois de composition sur un même ensemble, ayant chacune un élément neutre, nous démontrons que, si les deux actions à gauche déduites de ces lois sont mutuellement distributives, alors les deux lois sont idempotentes.

> Une loi de composition interne $\top$ sur un ensemble E est dite **idempotente** si chaque élément de E est idempotent, c'est-à-dire $x \top x = x$ pour chaque $x \in E$.

Avant d'établir le résultat annoncé, il convient de rappeler certains éléments de la théorie des actions.

1. Rappels sur les actions

Soient Ω et E deux ensembles. Une **action** de Ω sur E est une application de Ω dans l'ensemble E^E des applications de E dans lui-même.

Par exemple, pour chaque ensemble E, l'application identique

$$E^E \to E^E, \ \ f \mapsto f,$$

est une action de E^E sur E. Elle est appelée **action canonique** de E^E sur E.

1.1. Actions déduites d'une loi de composition interne

Soit $\top$ une loi de composition sur un ensemble E. Pour chaque $a \in E$, l'application

$$\gamma_a : E \to E, \ \ x \mapsto a \top x,$$

est appelée **translation à gauche** par a, tandis que l'application

$$\delta_a : E \to E,\ \ x \mapsto x \top a,$$

est appelée **translation à droite** par a. Ces translations définissent deux actions de E sur lui-même ; notamment,

$$\gamma : E \to E^E,\ \ a \mapsto \gamma_a, \qquad \text{et} \qquad \delta : E \to E^E,\ \ a \mapsto \delta_a.$$

La première, γ, est appelée **action à gauche** de E sur lui-même **déduite** de la loi $\top$. La seconde, δ, est nommée **action à droite** de E sur lui-même **déduite** de la loi $\top$.

1.2. La notion de distributivité dans la théorie des actions

D'entrée de jeu, nous rappelons la notion de distributivité pour les lois de composition internes.

Définition 1.

Soient $\top$ et $\perp$ deux lois de composition internes sur un ensemble E. La loi $\perp$ est dite **distributive à gauche** (resp. **à droite**) **par rapport** à la loi $\top$ si

$$x \perp (y \top z) = (x \perp y) \top (x \perp z) \qquad \Big(\text{resp. } (x \top y) \perp z = (x \perp z) \top (y \perp z)\Big)$$

quels que soient x, y et z dans E. Une loi distributive à gauche et à droite par rapport à une autre est dite simplement **distributive par rapport** à cette dernière.

La distributivité se conçoit également pour chaque action sur un magma.

Définition 2.

Une action $f : \Omega \to E^E,\ \ \alpha \mapsto f_\alpha$, d'un ensemble Ω sur un magma E de loi $\top$, est dite **distributive** si, pour tout $\alpha \in \Omega$, l'application f_α est un homomorphisme de E dans lui-même, c'est-à-dire $f_\alpha(x \top y) = f_\alpha(x) \top f_\alpha(y)$ pour tout $\alpha \in \Omega$ et chaque couple $(x, y) \in E \times E$.

Il est aussi possible de définir la distributivité entre deux actions d'un ensemble sur lui-même.

Définition 3.

Soient $f : \alpha \mapsto f_\alpha$ et $g : \alpha \mapsto g_\alpha$ deux actions d'un ensemble E sur lui-même. L'action g est dite **distributive par rapport** à l'action f si

$$g_\alpha(f_\beta(x)) = f_{g_\alpha(\beta)}(g_\alpha(x))$$

quels que soient α, β et x dans E.

Soient $\top$ et $\perp$ deux lois de composition sur un ensemble E. Pour la loi $\top$ (resp. $\perp$), la translation à gauche par un élément $\alpha \in E$ est notée f_α (resp. g_α). En d'autres termes,

$$f_\alpha : E \to E, \;\; x \mapsto \alpha \top x,$$

et

$$g_\alpha : E \to E, \;\; x \mapsto \alpha \perp x.$$

L'application $f : E \to E^E, \;\; \alpha \mapsto f_\alpha$, est donc l'action à gauche de E sur lui-même déduite de la loi $\top$, tandis que l'application $g : E \to E^E, \;\; \alpha \mapsto g_\alpha$, est l'action à gauche de E sur lui-même déduite de la loi $\perp$.

Dire que l'action f est distributive par rapport à l'action g signifie que, quels que soient α, β et x dans E, nous avons

$$f_\alpha(g_\beta(x)) = g_{f_\alpha(\beta)}(f_\alpha(x)),$$

c'est-à-dire

$$\alpha \top (\beta \perp x) = (\alpha \top \beta) \perp (\alpha \top x).$$

De manière analogue, la distributivité de l'action g par rapport à l'action f signifie que, quels que soient α, β et x dans E, nous avons

$$g_\alpha(f_\beta(x)) = f_{g_\alpha(\beta)}(g_\alpha(x)),$$

c'est-à-dire

$$\alpha \perp (\beta \top x) = (\alpha \perp \beta) \top (\alpha \perp x).$$

✍

Par conséquent, étant donné des lois de composition $\top$ et $\perp$ sur un ensemble E, dire que chacune des actions à gauche de E sur lui-même déduites de ces deux lois est distributive par rapport à l'autre signifie que chacune de ces deux lois est distributive à gauche par rapport à l'autre.

2. Une condition suffisante d'idempotence de deux lois sur un même ensemble

Dans cette section, nous démontrons le résultat suivant.

Proposition 1.

Soient $\top$ et $\perp$ des lois de composition sur un ensemble E admettant chacune un élément neutre. Si l'action à gauche de E sur lui-même déduite de chacune de ces lois est distributive par rapport à l'autre, alors tout élément de E est idempotent pour ces deux lois.

Démonstration :

Soit e l'élément neutre de la loi $\top$ et u l'élément neutre de la loi $\perp$.

Idempotence de la loi $\top$

Alors, $u = u\top e$ et $e = e\perp u$. D'où $u = u\top(e\perp u)$. Puisque la loi $\top$ est distributive par rapport à la loi $\perp$, il en résulte que $u = (u\top e)\perp(u\top u) = u\perp(u\top u)$. Comme u est neutre pour la loi $\perp$, ceci induit $u = u\top u$. À présent, soit $x \in E$. Alors,

$$x\top x = (x\perp u)\top(x\perp u).$$

Or, la loi $\perp$ est distributive à gauche par rapport à la loi $\top$. D'où

$$x\top x = x\perp(u\top u) = x\perp u = x.$$

Tout élément x de E est donc idempotent pour la loi $\top$.

Idempotence de la loi $\perp$

La neutralité des éléments e et u respectivement pour les lois $\top$ et $\perp$ entraîne $e = e\perp u$ et $u = u\top e$. Par suite, $e = e\perp(u\top e)$. En vertu de la distributivité à gauche de $\perp$ par rapport à $\top$, il s'ensuit

$$e = (e\perp u)\top(e\perp e) = e\top(e\perp e) = e\perp e.$$

En outre, pour tout $x \in E$, nous avons $x\perp x = (x\top e)\perp(x\top e) = x\top(e\perp e)$, car la loi $\top$ est distributive à gauche par rapport à $\perp$. Puisque $e\perp e = e$, il en découle que $x\perp x = x\top e = x$. Par conséquent, tout élément x de E est idempotent pour la loi $\perp$. $\square$