Deux définitions alternatives de la notion de groupe

Christian V. Nguembou Tagne

21 janvier 2022

Dans cette note, nous démontrons deux résultats pratiques qui permettent de formuler des définitions alternatives de la notion de groupe.

1. Définition par le neutre à gauche et par l'inversibilité à gauche

Nous savons qu'un **groupe** est un ensemble muni d'une loi associative admettant un élément neutre à gauche et à droite, et telle que tout élément de l'ensemble possède un inverse. Dans cette section, nous montrons que cette définition peut être simplifiée.

Proposition 1.

Soit $(x, y) \mapsto xy$ une loi *associative* sur un ensemble E vérifiant : il existe un élément e tel que $ex = x$ pour tout $x \in E$; pour chaque $x \in E$, il existe un $x' \in E$ tel que $x'x = e$. Alors, la loi $(x, y) \mapsto xy$ détermine sur E une structure de groupe.

Démonstration :

Soit $x \in E$. Alors, il existe dans E un élément x' tel que $x'x = e$, ainsi qu'un élément x'' satisfaisant $x''x' = e$. De ce fait,

$$xx' = e(xx') = (x''x')(xx') = x''\Big(x'(xx')\Big) = x''\Big((x'x)x'\Big) = x''(ex') = x''x' = e.$$

Ainsi, pour tout $x \in E$, nous avons

$$x'x = xx' = e. \tag{$\clubsuit$}$$

Du reste, $xe = x(x'x) = (xx')x = ex = x$. L'élément e est donc neutre à gauche et à droite. En outre, compte tenu de $(\clubsuit)$, tout élément de E admet un inverse. Par conséquent, la loi $(x, y) \mapsto xy$ détermine sur E une structure de groupe. $\square$

✍

Au compte de la proposition 1 démontrée ci-dessus, pour montrer qu'une loi *associative* détermine une **structure de groupe**, il suffit de montrer qu'il existe un élément neutre à gauche et que chaque élément admet un inverse à gauche relativement à cet élément neutre.

2. Définition par la surjectivité de certaines translations

Pour toute loi notée multiplicativement sur un ensemble E et pour chaque $a \in E$, la **translation à gauche** (resp. **à droite**) par a est l'application de E dans lui-même, notée γ_a (resp. δ_a), et définie par $\gamma_a(x) = ax$ (resp. $\delta_a(x) = xa$).

Les groupes peuvent être caractérisés au moyen des translations. Le résultat suivant précise les modalités de cette caractérisation.

Proposition 2.

Soit $(x, y) \mapsto xy$ une loi *associative* sur un ensemble E vérifiant : pour tout $x \in E$, la translation à gauche γ_x est une application surjective ; il existe un élément a de E tel que la translation à droite δ_a soit une application surjective. Alors, la loi $(x, y) \mapsto xy$ détermine sur E une structure de groupe.

Démonstration :

Dans la mesure où la translation à gauche γ_a est une surjection, il existe un $e \in E$ tel que $ae = a$. Maintenant, soit $x \in E$. Alors, il existe un $y \in E$ tel que $ya = x$, car la translation à droite δ_a est une application surjective. De ce fait,

$$xe = (ya)e = y(ae) = ya = x.$$

Donc, l'élément e est neutre à droite pour la loi $(x, y) \mapsto xy$. Cependant, il existe un élément x' dans E tel que $xx' = e$, car γ_x est une surjection. De manière analogue, il existe un $x'' \in E$ tel que $x'x'' = e$. Ainsi,

$$x'x = (x'x)e = (x'x)(x'x'') = \Big((x'x)x'\Big)x'' = \Big(x'(xx')\Big)x'' = (x'e)x'' = x'x'' = e.$$

Par suite, pour tout $x \in E$, il existe un $x' \in E$ vérifiant

$$x'x = xx' = e. \tag{$\diamond$}$$

Au demeurant, $ex = (xx')x = x(x'x) = xe = x$. Ceci induit que l'élément e est neutre. De plus, en raison des égalités $(\diamond)$, chaque élément de E est inversible. Par conséquent, la loi $(x, y) \mapsto xy$ détermine sur E une structure de groupe. $\square$