Baccalauréat C & E 2021, Cameroun

Épreuve zéro de mathématiques

Awono Messi

Partie A : Évaluation des ressources

Exercice 1.

On considère un dé cubique homogène dont les faces sont numérotées 0, 0, -1, 1, 1 et 1. On lance le dé deux fois de suite et on note par a le résultat du premier lancer et par b celui du deuxième lancer. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on considère la transformation f d'écriture complexe $z' = (a + ib)z + ib$.

(1) Calculez la probabilité de chacun des évènements suivants.

- **(a)** A : « f est une symétrie centrale ».
- **(b)** B : « f est une translation ».
- **(c)** C : « f est une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ ».
- **(d)** D : « f est une similitude directe de centre Ω d'affixe $\omega = -1$ ».

(2) Montrez que la probabilité de l'évènement $E = D|C$, c'est-à-dire D sachant C, est égale à 0,75.

Exercice 2.

(I) Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est symbolisée par $t_{\overrightarrow{u}}$; la symétrie orthogonale d'axe $(\mathscr{D})$ est noté $S_{(\mathscr{D})}$; tandis que l'homothétie de centre C et de rapport r est désignée par $h_{(C,r)}$. Soit ABC un triangle rectangle en A et (Δ) la médiatrice du segment $[AB]$. Répondez par VRAI ou FAUX en justifiant votre réponse :

- **(1)** $t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{(\Delta)} = t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(AC)}$.
- **(2)** $S_{(AB)} \circ h_{(A,2)} \circ S_{(AC)} = h_{(A,-2)}$.
- **(3)** Si φ est une isométrie fixant les points A et B, alors $\varphi^{-1} \circ S_{(\Delta)} \circ \varphi$ est une symétrie glissée d'axe (Δ).

(II) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation

$$5x - 3y = 17. \tag{\textbf{E}}$$

(1) Après avoir justifié que le couple $(4, 1)$ est une solution particulière de l'équation (**E**), résolvez (**E**).

(2) Soit (x, y) une solution de l'équation (**E**) et m un entier relatif.

(a) Montrez que, si x est un diviseur de y, alors x est un diviseur de 17.

(b) Trouvez les valeurs de m pour lesquelles le quotient $F = \dfrac{1+5m}{4+3m}$ est un entier relatif.

Exercice 3.

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On pose

$$\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{j} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{e_2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{i} + \frac{1}{2}\overrightarrow{j}.$$

(1) Démontrez que le triplet $\mathscr{R} = \left(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$ est un repère orthonormé du plan.

(2) Une conique (Γ) a pour équation $13X^2 + 7Y^2 + 6\sqrt{3}XY = 16$ dans le repère $\mathscr{R}$.

(a) Écrivez une équation cartésienne réduite de cette conique dans le repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

(b) Déduisez-en sa nature et son excentricité.

Exercice 4.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, 2]$ par $f(x) = 2\sqrt{2x - x^2}$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

(1)(a) Montrez que f est dérivable sur l'intervalle $I =]0, 2[$ et calculez $f'(x)$ pour tout $x \in I$.

(b) Dressez le tableau de variation de f, puis tracez $(\mathscr{C})$.

(c) On suppose que l'**œuf d'un oiseau** a la forme d'un solide de révolution obtenu par la rotation de la courbe $(\mathscr{C})$ autour de l'axe $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$. Calculer le volume en *unité de volume* (*u.v.*) de cet œuf.

(2) Soit $(\mathscr{C}')$ le symétrique orthogonal de $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$. On note $(\Gamma) = (\mathscr{C}) \cup (\mathscr{C}')$.

(a) Montrez que (Γ) a pour équation $(x-1)^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

(b) Donnez la nature de (Γ), son centre Ω, son excentricité e, ses foyers P et P'.

(c) Écrivez une équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à (Γ) au point $M_0(3/2, y_0)$, où $y_0 > 0$.

(3) On désigne par F la fonction définie sur l'intervalle $J = [0, \pi]$ par

$$F(x) = \int_0^{1+\cos x} f(t)dt.$$

(a) Montrez que F est dérivable sur l'intervalle J et que $F'(x) = -2\sin^2 x$ pour tout $x \in J$.

(b) Calculer $F(\pi)$ et déduisez-en l'expression de $F(x)$ pour tout $x \in J$.

(c) Déduisez-en l'aire $\mathfrak{A}$, en unité d'aire, de l'intérieur de l'ellipse (Γ).

Partie B : Évaluation des compétences

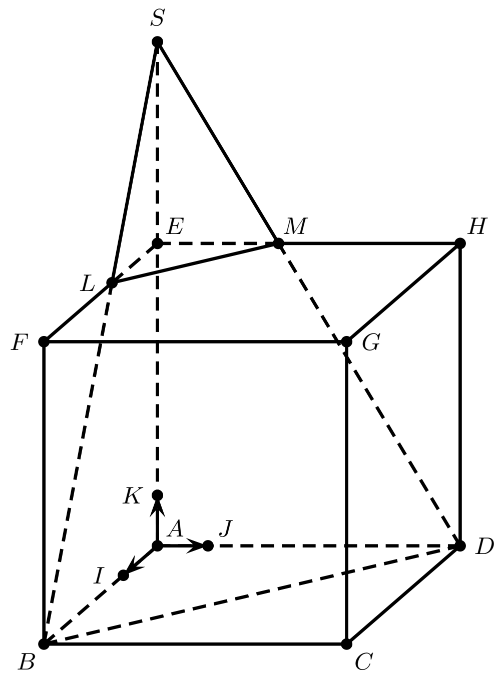
Situation

Un artiste souhaite réaliser une sculpture composée d'un tétraèdre posé sur un cube de 6 m d'arrête. Ces deux solides sont représentés par le cube $ABCDEFGH$ et par le tétraèdre $SELM$ comme l'indique la figure ci-contre.

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK}\right)$ satisfaisant $I \in [AB]$, puis $J \in [AD]$ et $K \in [AE]$, ainsi que les égalités $AI = AJ = AK = 1$, l'unité graphique représentant 1 m.

Les points L, M et S sont définis de la façon suivante :

- L est le point tel que $\overrightarrow{FL} = \dfrac{2}{3} \cdot \overrightarrow{FE}$;
- M est le point d'intersection du plan (BDL) et de la droite (EH) ;
- S est le point d'intersection des droites (BL) et (AK).



Tâches

(1) Déterminez une équation cartésienne du plan (BDL).

(2) Déterminez le volume du tétraèdre $SELM$.

(3) L'artiste souhaite que la mesure de l'angle $\widehat{SLE}$ soit comprise entre 55° et 60°. Cette contrainte d'angle est-elle respectée ?