Cordes d'une ellipse passant par un foyer

Christian Nguembou Tagne

2 octobre 2022

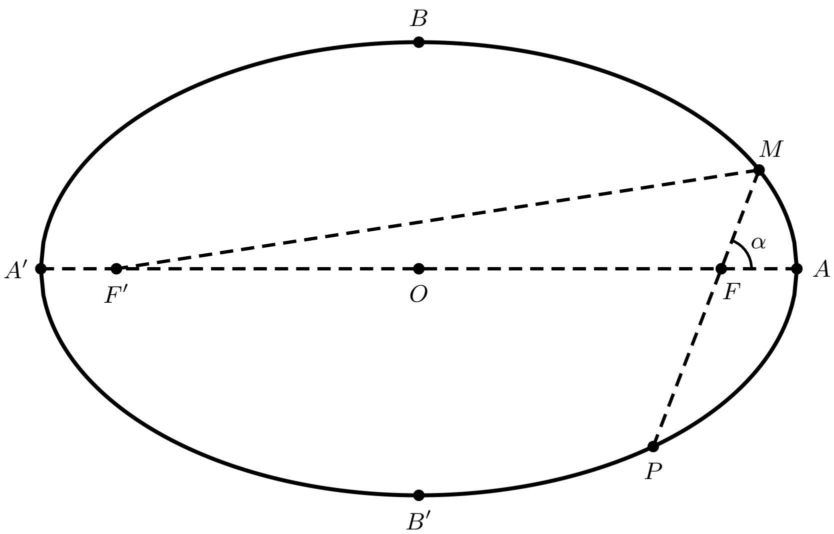
On considère une ellipse de foyers F et F', puis $(\mathcal{D})$ une droite passant par F et coupant l'ellipse en deux points M et P.

Propriété 1.

La quantité $\dfrac{1}{FM} + \dfrac{1}{FP}$ est indépendante du choix de la droite $(\mathcal{D})$.

Démonstration :

Soient A, A', B et B' les sommets l'ellipse ; les segments $[AA']$ et $[BB']$ étant respectivement grand et petit axe focal. Nous savons qu'il existe un repère orthonormé d'origine O, le centre de l'ellipse, tel que $A(a,0)$ et $A'(-a,0)$, puis $B(0,b)$ et $B'(0,-b)$, où a et b sont des réels positifs satisfaisant $a > b$. Alors, les cordonnées des foyers sont données respectivement par $F(c,0)$ et $F'(-c,0)$ avec $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, tandis que l'excentricité de l'ellipse est $e = \dfrac{c}{a}$.



Maintenant, nous notons qu'il existe un réel $\alpha \in]-\pi, \pi]$ tel que

$$\mathbf{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FM}}\right) \equiv \alpha \, [\mathrm{mod}\, 2\pi].$$

Ainsi,

$$\textbf{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{FF'}, \overrightarrow{FM}}\right) \equiv \pi + \alpha \,[\text{mod}\, 2\pi].$$

De ce fait,

$$\overrightarrow{F'F} \cdot \overrightarrow{FM} = -\overrightarrow{FF'} \cdot \overrightarrow{FM} = -FF' \cdot FM \cos(\alpha + \pi) = FF' \cdot FM \cos\alpha = 2c \cdot FM \cos\alpha.$$

Cependant,

$$F'M^2 = \left(\overrightarrow{F'F} + \overrightarrow{FM}\right)^2 = F'F^2 + FM^2 + 2 \cdot \overrightarrow{F'F} \cdot \overrightarrow{FM} = 4c^2 + FM^2 + 4c \cdot FM \cos\alpha.$$

De plus, selon la définition bifocale de l'ellipse, $F'M + FM = 2a$. D'où

$$F'M^2 = (2a - FM)^2 = FM^2 - 4aFM + 4a^2.$$

Il en résulte que

$$4c^2 + FM^2 + 4c \cdot FM \cos\alpha = FM^2 - 4aFM + 4a^2,$$

c'est-à-dire

$$4(a + c\cos\alpha)FM = 4(a^2 - c^2) = 4b^2.$$

De ce fait,

$$FM = \frac{b^2}{a + c\cos\alpha} = \frac{b^2}{a\left(1 + \frac{c}{a}\cos\alpha\right)}.$$

En posant $p = \frac{b^2}{a}$, nous obtenons donc

$$FM = \frac{p}{1 + e\cos\alpha}.$$

Nous remarquons à présent que

$$\textbf{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FM}}\right) \equiv \alpha + \pi \,[\text{mod}\, 2\pi].$$

En raisonnant comme ci-dessus, il en découle que

$$FP = \frac{p}{1 + e\cos(\alpha + \pi)} = \frac{p}{1 - e\cos\alpha}.$$

Par conséquent,

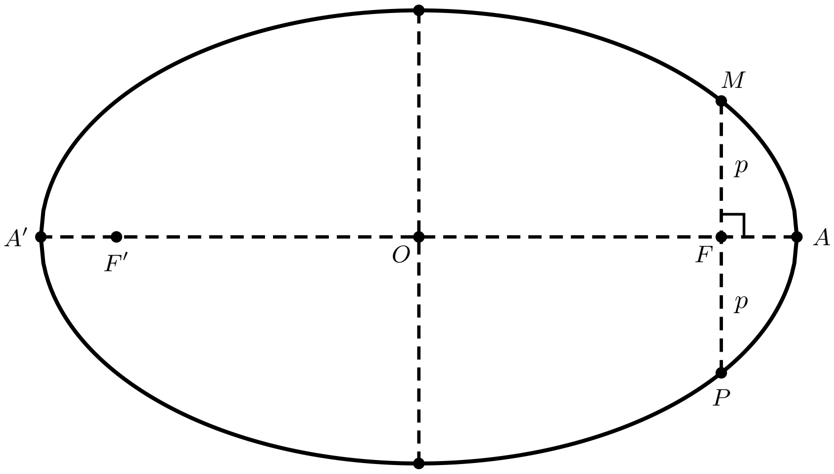
$$\frac{1}{FM} + \frac{1}{FP} = \frac{1 + e\cos\alpha}{p} + \frac{1 - e\cos\alpha}{p} = \frac{2}{p} = \frac{2a}{b^2}.$$

Ceci établit que la quantité $\dfrac{1}{FM} + \dfrac{1}{FP}$ est indépendante du choix de la droite $(\mathcal{D})$. □

Notons au passage que

$$MP = FM + FP = \frac{p}{1 + e\cos\alpha} + \frac{p}{1 - e\cos\alpha} = \frac{2p}{1 - e^2\cos^2\alpha} \geq 2p.$$

En particulier, si la droite $(\mathcal{D})$ est perpendiculaire à l'axe focal, c'est-à-dire si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, alors $FM = FP = p$ et $MP = 2p$.



Propriété 2.

Le minimum de $\dfrac{1}{FM^2} + \dfrac{1}{FP^2}$ est $\dfrac{2}{p^2}$, où p est la demi longueur de la corde perpendiculaire à l'axe focal en F.

Démonstration :

Nous posons $r = \frac{1}{FM} + \frac{1}{FP}$. Alors,

$$\frac{1}{FM^2} + \frac{1}{FP^2} = \left(\frac{1}{FM} + \frac{1}{FP}\right)^2 - \frac{2}{FM \times FP} = r^2 - \frac{2}{FM \times FP}.$$

Du reste,

$$r = \frac{1}{FM} + \frac{1}{FP} = \frac{FM + FP}{FM \times FP} = \frac{MP}{FM \times FP}.$$

Il en résulte que

$$\frac{1}{FM \times FP} = \frac{1}{MP} \times r.$$

De ce fait,

$$\frac{1}{FM^2} + \frac{1}{FP^2} = r^2 - \frac{2r}{MP}.$$

Or, r est une constante réelle strictement positive (voir la Propriété 1). Donc, le nombre $r^2 - \frac{2r}{MP}$ est minimal lorsque $\frac{2r}{MP}$ est maximal, c'est-à-dire lorsque la longueur MP est minimale. Ceci se produit quand la droite $(\mathcal{D})$ est perpendiculaire à l'axe focal (FF') en F. Le cas échéant, $FM = FP = p$. Par conséquent, Le minimum de $\dfrac{1}{FM^2} + \dfrac{1}{FP^2}$ est

$$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2} = \frac{2}{p^2}.$$

□

En complément, soulignons que le nombre $\dfrac{1}{FM^2} + \dfrac{1}{FP^2}$ est maximal lorsque la longueur MP est maximale. Cela est le cas lorsque la droite $(\mathcal{D})$ se confond à l'axe focal. De ce fait, le maximum de $\dfrac{1}{FM^2} + \dfrac{1}{FP^2}$ est $\dfrac{2}{a^2}$, où a la longueur du grand rayon de l'ellipse.