Propriétés sur les tangentes des ellipses et sur les miroirs elliptiques

Christian Nguembou Tagne

2 octobre 2022

Dans un repère orthonormé fixé d'origine O, soit une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Propriété 1.

Si M est un point de l'ellipse, et $\mathcal{T}$ la tangente à l'ellipse en M, alors la quantité $d(F, \mathcal{T}) \times d(F', \mathcal{T})$ est indépendante du choix de M.

Démonstration :

Soit $M(x_0, y_0)$. Alors, une équation cartésienne de la tangente $\mathcal{T}$ est

$$(b^2x_0)x + (a^2y_0)y - a^2b^2 = 0.$$

Du reste, les coordonnées des foyers sont données par $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$, où $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Ainsi,

$$d(F, \mathcal{T}) = \frac{|b^2x_0c - a^2b^2|}{\sqrt{b^4x_0^2 + a^4y_0^2}} = \frac{b^2 \cdot |a^2 - x_0c|}{\sqrt{b^4x_0^2 + a^4y_0^2}}$$

et

$$d(F', \mathcal{T}) = \frac{|-b^2x_0c - a^2b^2|}{\sqrt{b^4x_0^2 + a^4y_0^2}} = \frac{b^2 \cdot |a^2 + x_0c|}{\sqrt{b^4x_0^2 + a^4y_0^2}}.$$

De ce fait,

$$d(F, \mathcal{T}) \times d(F', \mathcal{T}) = \frac{b^4 \cdot |(a^2 - x_0c)(a^2 + x_0c)|}{b^4x_0^2 + a^4y_0^2} = \frac{b^4 \cdot |a^4 - x_0^2c^2|}{b^4x_0^2 + a^4y_0^2}$$

Cependant, $x_0^2 \leq a^2$ et $c^2 < a^2$. D'où $0 < a^4 - x_0^2c^2$ et

$$d(F, \mathcal{T}) \times d(F', \mathcal{T}) = \frac{b^4(a^4 - x_0^2c^2)}{b^4x_0^2 + a^4y_0^2}.$$

Par ailleurs, $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0$, c'est-à-dire $a^2y_0^2 = -b^2x_0^2 + a^2b^2$. D'où

$$\begin{aligned} b^4x_0^2 + a^4y_0^2 = b^4x_0^2 + a^2(a^2y_0^2) = b^4x_0^2 + a^2(-b^2x_0^2 + a^2b^2) &= b^4x_0^2 - a^2b^2x_0^2 + a^4b^2 \\ &= a^4b^2 - b^2x_0^2(a^2 - b^2) \\ &= a^4b^2 - b^2x_0^2c^2 \\ &= b^2(a^4 - x_0^2c^2). \end{aligned}$$

Donc,

$$d(F, \mathcal{T}) \times d(F', \mathcal{T}) = \frac{b^4(a^4 - x_0^2c^2)}{b^2(a^4 - x_0^2c^2)} = b^2.$$

Par conséquent, la quantité $d(F, \mathcal{T}) \times d(F', \mathcal{T})$ est indépendante du choix de M. $\square$

Propriété 2.

Soient A et A' les sommets de l'ellipse situés sur l'axe focal. Si M est un point de l'ellipse, distinct de A et A', puis P et P' les points d'intersection de la tangente en M avec les tangentes aux sommets A et A', alors le produit $AP \times AP'$ est indépendant du choix de M.

Démonstration :

Soit $M(x_0, y_0)$ un point de l'ellipse distinct des sommets $A(a, 0)$ et $A'(-a, 0)$. Alors, $x_0 \neq a$ et $x_0 \neq -a$, puis $y_0 \neq 0$. De plus, la tangente $\mathcal{T}$ à l'ellipse en M a pour équation

$$(b^2x_0)x + (a^2y_0)y - a^2b^2 = 0.$$

Maintenant, soient P et P' les points d'intersection de la tangente $\mathcal{T}$ avec les tangentes aux sommets A et A'. Ces dernières ont pour équations cartésiennes $x = -a$ et $x = a$, respectivement. De ce fait, les abscisses des points P et P' sont $x_P = a$ et $x_{P'} = -a$. Il en résulte que les ordonnées des points P et P' satisfont

$$ab^2x_0 + a^2y_0y_P - a^2b^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad -ab^2x_0 + a^2y_0y_{P'} - a^2b^2 = 0.$$

La première de ces deux égalités entraîne

$$y_P = \frac{a^2b^2 - ab^2x_0}{a^2y_0} = \frac{ab^2(a - x_0)}{a^2y_0} = \frac{b^2(a - x_0)}{ay_0}.$$

La seconde égalité livre

$$y_{P'} = \frac{a^2b^2 + ab^2x_0}{a^2y_0} = \frac{ab^2(a + x_0)}{a^2y_0} = \frac{b^2(a + x_0)}{ay_0}.$$

Cependant, $AP = |y_P|$ et $A'P' = |y_{P'}|$. Par conséquent,

$$AP \times A'P' = \frac{b^4|(a - x_0)(a + x_0)|}{a^2y_0^2} = \frac{b^4 \cdot |a^2 - x_0^2|}{a^2y_0^2} = \frac{b^4(a^2 - x_0^2)}{a^2y_0^2},$$

car $x_0 < a$. En outre, $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0$. D'où

$$a^2y_0^2 = a^2b^2 - b^2x_0^2 = b^2(a^2 - x_0^2)$$

et

$$AP \times A'P' = \frac{b^4(a^2 - x_0^2)}{b^2(a^2 - x_0^2)} = b^2.$$

Le produit $AP \times AP'$ est donc indépendant du choix de M. □

Une argumentation analogue permet de prouver ce résultat pour les sommets B et B' du petit axe. Précisément, si M est un point de l'ellipse, distinct de B et B', puis P et P' les points d'intersection de la tangente en M avec les tangentes aux sommets B et B', alors

$$BP \times BP' = a^2.$$

Propriété 3.

Une droite passant par un des foyers de l'ellipse est réfléchie sur l'ellipse en une droite passant par l'autre foyer.

Démonstration :

Il s'agit ici de démontrer que pour tout point M de l'ellipse, la droite normale à la tangente $(\mathcal{T})$ à l'ellipse en M est la bissectrice de l'angle $\widehat{FMF'}$.

Nous supposons tout d'abord que M est l'un des sommets de l'axe focal. Alors, la droite (MF) est égale à (MF') et (FF'), puis est la normale à $(\mathcal{T})$. Du reste, l'angle $\widehat{FMF'}$ est nul. De ce fait, la normale (MF) à $(\mathcal{T})$ est bel et bien la bissectrice de l'angle $\widehat{FMF'}$.

Dans la suite de l'argumentation nous supposons que M est distinct de l'un des deux sommets de l'axe focal. De plus, nous considérons le point N d'intersection de l'axe focal (FF') et de la perpendiculaire à $(\mathcal{T})$ en M. Alors, la droite (MN) est la normale à la tangente $(\mathcal{T})$ en M. Nous allons établir que les angles $\widehat{FMN}$ et $\widehat{F'MN}$ sont congruents. Ceci équivaut à

$$\cos\left(\mathbf{Mes}\,\widehat{FMN}\right) = \cos\left(\mathbf{Mes}\,\widehat{F'MN}\right),$$

c'est-à-dire

$$\frac{\overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{MN}}{MF \times MN} = \frac{\overrightarrow{MF'} \cdot \overrightarrow{MN}}{MF \times MN}$$

ou

$$\frac{\overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{MN}}{MF} = \frac{\overrightarrow{MF'} \cdot \overrightarrow{MN}}{MF}. \qquad (\dagger)$$

Soit $M(x_0, y_0)$. Alors, $y_0 \neq 0$ et une équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à l'ellipse en M est

$$(b^2x_0)x + (a^2y_0)y - a^2b^2 = 0.$$

Donc, $\overrightarrow{u}(-a^2y_0, b^2x_0)$ est un vecteur directeur de $(\mathcal{T})$. L'abscisse x_N et l'ordonnés y_N du point N vérifient ainsi $y_N = 0$ et

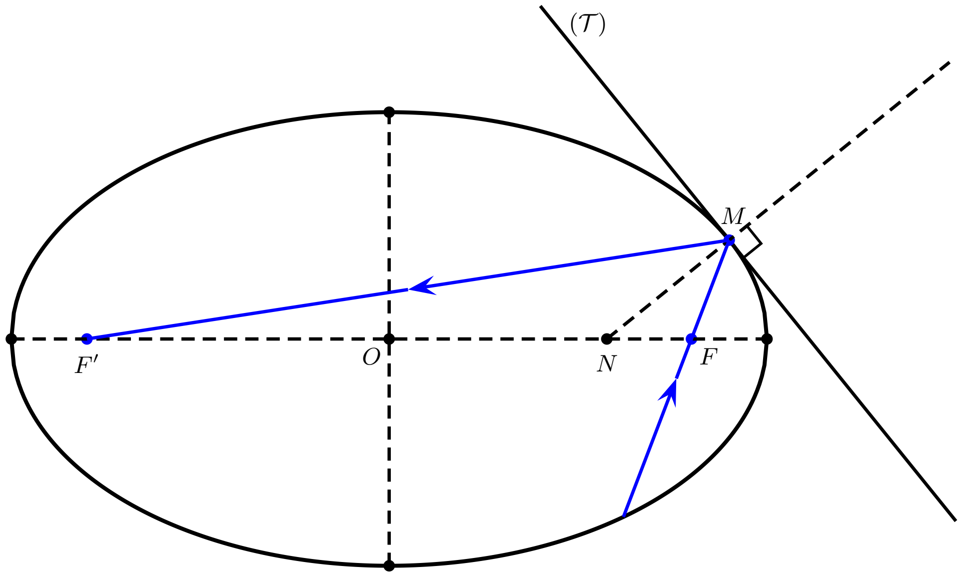
$$0 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{MN} = -a^2y_0(x_N - x_0) + b^2x_0(0 - y_0) = -a^2y_0x_N + a^2x_0y_0 - b^2x_0y_0.$$

De ce fait,

$$x_N = \frac{a^2x_0y_0 - b^2x_0y_0}{a^2y_0} = x_0 - \frac{b^2x_0}{a^2}$$

et

$$\overrightarrow{MN}\left(-\frac{b^2x_0}{a^2}, -y_0\right).$$



Du reste, les foyers de l'ellipse sont donnés par $F(c,0)$ et $F'(-c,0)$, où $c = \sqrt{a^2-b^2}$. D'où

$$\overrightarrow{MF}(c - x_0, -y_0) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{MF'}(-c - x_0, -y_0).$$

Par conséquent,

$$\overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{MN} = -\frac{b^2x_0}{a^2}(c - x_0) + y_0^2 = -\frac{b^2cx_0}{a^2} + \frac{b^2x_0^2}{a^2} + y_0^2$$

et

$$\overrightarrow{MF'} \cdot \overrightarrow{MN} = -\frac{b^2x_0}{a^2}(-c - x_0) + y_0^2 = \frac{b^2cx_0}{a^2} + \frac{b^2x_0^2}{a^2} + y_0^2.$$

Cependant, les coordonnées (x_0, y_0) de M satisfont l'équation de l'ellipse. Autrement dit,

$$\frac{b^2x_0^2}{a^2} + y_0^2 = b^2.$$

Il en résulte que

$$\overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{MN} = -\frac{b^2cx_0}{a^2} + b^2 = \frac{b^2(a^2 - cx_0)}{a^2} \tag{$*$}$$

et

$$\overrightarrow{MF'} \cdot \overrightarrow{MN} = \frac{b^2cx_0}{a^2} + b^2 = \frac{b^2(a^2 + cx_0)}{a^2}. \tag{$**$}$$

En outre,

$$MF^2 = (c - x_0)^2 + y_0^2 = c^2 - 2cx_0 + x_0^2 + y_0^2 = a^2 - b^2 - 2cx_0 + x_0^2 + b^2 - \frac{b^2x_0^2}{a^2}$$

et

$$\begin{aligned} MF^2 = \frac{a^4 - 2a^2cx_0 + a^2x_0^2 - b^2x_0^2}{a^2} = \frac{a^4 - 2a^2cx_0 + (a^2 - b^2)x_0^2}{a^2} &= \frac{a^4 - 2a^2cx_0 + c^2x_0^2}{a^2} \\ &= \frac{(a^2 - cx_0)^2}{a^2}, \end{aligned}$$

puis

$$(MF')^2 = (c + x_0)^2 + y_0^2 = c^2 + 2cx_0 + x_0^2 + y_0^2 = a^2 - b^2 + 2cx_0 + x_0^2 + b^2 - \frac{b^2x_0^2}{a^2}$$

et

$$\begin{aligned} (MF')^2 = \frac{a^4 + 2a^2cx_0 + a^2x_0^2 - b^2x_0^2}{a^2} = \frac{a^4 + 2a^2cx_0 + (a^2 - b^2)x_0^2}{a^2} &= \frac{a^4 + 2a^2cx_0 + c^2x_0^2}{a^2} \\ &= \frac{(a^2 + cx_0)^2}{a^2}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, $-a < x_0 < a$ et $0 < c < a$. Ainsi, $-a^2 < cx_0 < a^2$, puis

$$0 < a^2 - cx_0 \qquad \text{et} \qquad 0 < a^2 + cx_0.$$

Ceci entraîne

$$MF = \frac{a^2 - cx_0}{a} \qquad \text{et} \qquad MF' = \frac{a^2 + cx_0}{a}.$$

Compte tenu des égalités $(*)$ et $(**)$ ci-dessus, il en découle que

$$\frac{\overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{MN}}{MF} = \frac{b^2(a^2 - cx_0)}{a^2} \times \frac{a}{a^2 - cx_0} = \frac{b^2}{a}$$

et

$$\frac{\overrightarrow{MF'} \cdot \overrightarrow{MN}}{MF'} = \frac{b^2(a^2 + cx_0)}{a^2} \times \frac{a}{a^2 + cx_0} = \frac{b^2}{a}.$$

L'égalité $(\dagger)$ est donc vérifiée. Ceci signifie que

$$\mathbf{Mes}\,\widehat{FMN} = \mathbf{Mes}\,\widehat{F'MN}.$$

Par conséquent, la droite (MN) est la bissectrice de l'angle $\widehat{FMF'}$. □

Propriété 4.

Si M et P sont deux points de l'ellipse pour lesquels la tangente en M est parallèle à (OP), l'aire du triangle OPM est indépendante du choix des points M et P.

Démonstration :

Soit $(\mathcal{T})$ la tagente à l'ellipse en un point $M(x_0, y_0)$, puis $P(x_P, y_P)$ un point de l'ellipse tel que la tangente $(\mathcal{T})$ soit parallèle à la droite (OP). De plus, nous désignons l'aire du triangle OPM par S, puis considérons les sommets A, A', B et B' tels que $[AA']$ et $[BB']$ soient respectivement grand axe et petit axe.

Premier cas : Soit $y_0 = 0$, c'est-à-dire $M = A$ ou $M = A'$. Alors, la tangente $(\mathcal{T})$ est parallèle à l'axe (BB'). De ce fait, $P = B$ ou $P = B'$. Par conséquent, OPM est l'un des triangles OBA, OBA', $OB'A$ et $OB'A$, rectangles chacun en O. D'où

$$S = \frac{ab}{2}.$$

Second cas : Soit $y_0 \neq 0$. Alors, l'aire du triangle OPM est

$$S = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP}\right)\right|.$$

Cependant,

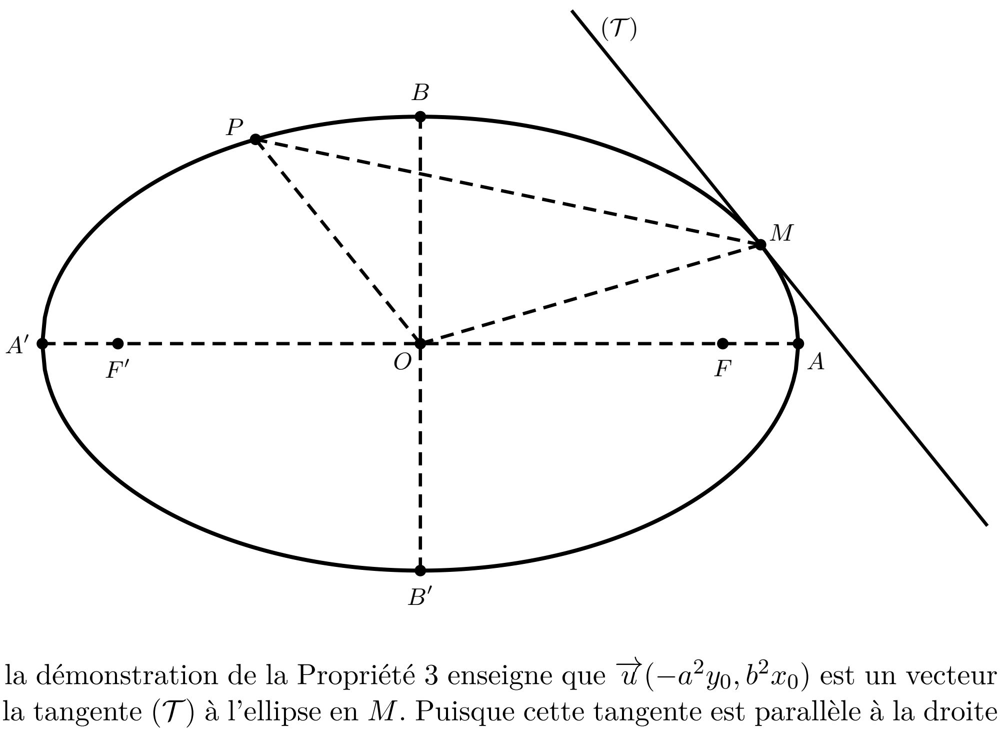
$$\det\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP}\right) = \begin{vmatrix} x_0 & x_P \\ y_0 & y_P \end{vmatrix} = x_0 y_P - y_0 x_P.$$

De ce fait,

$$4S^2 = (x_0 y_P - y_0 x_P)^2 = x_0^2 y_P^2 + y_0^2 x_P^2 - 2x_0 y_P y_0 x_P.$$

Autrement dit,

$$4S^2 = x_0^2 y_P^2 + y_0^2 x_P^2 - 2(x_0 x_P)(y_0 y_P). \qquad (\diamond)$$



Par ailleurs, la démonstration de la Propriété 3 enseigne que $\overrightarrow{u}(-a^2 y_0, b^2 x_0)$ est un vecteur directeur de la tangente $(\mathcal{T})$ à l'ellipse en M. Puisque cette tangente est parallèle à la droite

(OP), il en résulte que

$$0 = \det\left(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{u}\right) = \begin{vmatrix} x_P & -a^2y_0 \\ y_P & b^2x_0 \end{vmatrix} = b^2x_0x_P + a^2y_0y_P.$$

De ce fait,

$$y_0y_P = -\frac{b^2x_0x_P}{a^2}. \qquad (\diamond\diamond)$$

De plus, les coordonnées des points M et P satisfont l'équation de l'ellipse. Ainsi,

$$b^2x_0 + a^2y_0^2 = a^2b^2 \qquad \text{et} \qquad b^2x_P + a^2y_P^2 = a^2b^2,$$

c'est-à-dire

$$y_0^2 = b^2 - \frac{b^2x_0^2}{a^2} \qquad \text{et} \qquad y_P^2 = b^2 - \frac{b^2x_P^2}{a^2}.$$

Ces égalités, conjuguées aux égalités $(\diamond)$ et $(\diamond\diamond)$, induisent

$$\begin{aligned} 4S^2 &= x_0^2\left(b^2 - \frac{b^2x_P^2}{a^2}\right) + x_P^2\left(b^2 - \frac{b^2x_0^2}{a^2}\right) + 2\frac{b^2x_0^2x_P^2}{a^2} \\ &= b^2x_0^2 - \frac{b^2x_0^2x_P^2}{a^2} + b^2x_P^2 - \frac{b^2x_0^2x_P^2}{a^2} + 2\frac{b^2x_0^2x_P^2}{a^2}. \end{aligned}$$

Donc,

$$4S^2 = b^2(x_0^2 + x_P^2).$$

En outre, l'égalité $(\diamond\diamond)$ livre

$$y_P = -\frac{b^2x_0x_P}{a^2y_0},$$

puis

$$a^2b^2 = b^2x_P^2 + a^2y_P^2 = b^2x_P^2 + \frac{a^2b^4x_0^2x_P^2}{a^4y_0^2} = b^2x_P^2 + \frac{b^4x_0^2x_P^2}{a^2y_0^2} = \left(1 + \frac{b^2x_0^2}{a^2y_0^2}\right)b^2x_P^2.$$

Ceci entraîne

$$a^2 = \frac{a^2y_0^2 + b^2x_0^2}{a^2y_0^2} \cdot x_P^2 = \frac{a^2b^2}{a^2y_0^2} \cdot x_P^2 = \frac{b^2}{y_0^2} \cdot x_P^2.$$

De ce fait,

$$x_P^2 = \frac{a^2y_0^2}{b^2}.$$

Il en découle que

$$4S^2 = b^2\left(x_0^2 + \frac{a^2y_0^2}{b^2}\right) = b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2.$$

Par conséquent,

$$S = \frac{ab}{2}.$$

L'aire du triangle OPM est donc indépendante du choix des points M et P. $\square$