

Une équation non conventionnelle dans \mathbb{N}

CHRISTIAN NGUEMBOU TAGNE

2 octobre 2022

Cet exercice, inspiré des Olympiades de Moscou de l'année 1968, est tiré de l'ouvrage [1] référencé ci-dessous.

Soit x un entier naturel quelconque, puis $p(x)$ le produit de ses chiffres en numération décimale. Pour résoudre l'équation

$$x^2 - 10x - 22 = p(x), \quad (\mathbf{E})$$

nous procédons en plusieurs étapes.

1. Un trait des chiffres des solutions potentielles

Tout d'abord, nous notons que, si p est un entier naturel strictement supérieur à 1, alors $p^2 - p = p(p-1) > 0$ et $p^2 > p > 1^2$. Donc, si a et p sont des entiers naturels vérifiant $p \geq 2$ et $a^2 = p$, alors $1 < a < p$.

Au demeurant, pour tout entier naturel x , nous avons

$$x^2 - 10x - 22 = x^2 - 2 \times 5 \times x + 5^2 - 25 - 22 = (x - 5)^2 - 47.$$

Maintenant, soit x un entier, dont l'écriture décimale contient au moins un zéro. Alors, $p(x) = 0$. Si x est une solution de l'équation (\mathbf{E}) , alors $(x - 5)^2 = 47$. Ceci signifie que le nombre premier 47 a un diviseur positif distinct de 1 et de 47 : une contradiction de la définition des nombres premiers.

Par conséquent, toute solution potentielle de (\mathbf{E}) n'a que des chiffres distincts de 0.

2. Non-existence de solutions à un chiffre

Soit x un entier naturel dont l'écriture décimale à un chiffre. Alors, il existe un entier u tel que $0 \leq u \leq 9$ et $x = \bar{u}^{10}$. De ce fait,

$$x^2 - 10x - 22 - p(x) = u^2 - 10u - 22 - u = u^2 - 11u - 22 = u^2 - 11(u + 2).$$

Par suite, si x est une solution de l'équation (\mathbf{E}) , alors $u > 0$ et $u^2 = 11(u + 2)$. D'où 11 divise u^2 , et donc u . Ceci est impossible, car $1 \leq u \leq 9$. L'équation (\mathbf{E}) n'admet donc pas de solution à un chiffre.

3. Détermination de toutes les solutions à deux chiffres

Soit x un entier naturel dont l'écriture décimale est constituée deux chiffres non nuls. Alors, il existe des entiers d et u de l'intervalle $[1, 9]$ tels que $x = \overline{du}^{10}$. Alors,

$$\begin{aligned} x^2 - 10x - 22 &= (10d + u)^2 - 10(10d + u) - 22 = 100d^2 + 20du + u^2 - 100d - 10u - 22 \\ &= u^2 + 10u(2d - 1) + 100d(d - 1) - 22. \end{aligned}$$

Puisque $u \geq 1$, il en résulte que

$$x^2 - 10x - 22 \geq 1 + 10(2d - 1) + 100d(d - 1) - 22,$$

c'est-à-dire

$$x^2 - 10x - 22 \geq 10(2d - 1) + 100d(d - 1) - 21.$$

Nous supposons que $d \geq 2$. Alors, $2d - 1 \geq 3$ et $d(d - 1) \geq 2$, puis

$$x^2 - 10x - 22 \geq 30 + 200 - 21 = 209.$$

Cependant, $81 = 9 \times 9 \geq ud = p(x)$. Par conséquent, la relation $d \geq 2$ entraîne

$$x^2 - 10x - 22 > p(x).$$

Par conséquent, si x est une solution de l'équation **(E)**, alors le chiffre d des dizaines est nécessairement 1.

Le cas échéant,

$$\begin{aligned} 0 = x^2 - 10x - 22 - p(x) &= u^2 + 10u - 22 - u = u^2 + 9u - 22 \\ &= u^2 - 4u + 4 + 13u - 26 \\ &= (u - 2)^2 + 13(u - 2) \\ &= (u - 2)(u + 11). \end{aligned}$$

Puisque $u \in [1, 9] \cap \mathbb{N}$, il en découle que $u = 2$ et $x = 12$. Du reste, nous avons effectivement

$$12^2 - 10 \times 12 - 22 = 1 \times 2.$$

Donc, 12 est l'unique solution à deux chiffres de l'équation **(E)**.

4. Non-existence de solutions à plus de deux chiffres

Soit x un entier naturel s'écrivant en numération décimale avec trois chiffres ou plus, tous non nuls. Alors, il existe un entier $n \geq 2$, puis des entiers a_0, a_1, \dots, a_n tels que $1 \leq a_k \leq 9$ pour chaque $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ et

$$x = \overline{a_n \cdots a_1 a_0}^{10}.$$

Par suite,

$$x = 10^n a_n + \cdots + 10^1 a_1 + a_0 \geq 10^n a_n + 10^1 a_1 + a_0 \geq 10^n + 10 + 1$$

et

$$x - 10 \geq 10^n + 1 > 10^n \geq 10^2 > 10.$$

De ce fait,

$$x^2 - 10x - 22 = x(x - 10) - 22 > 10(10^n + 1) - 22 = 10^{n+1} + 110 - 22 = 10^{n+1} + 88$$

et

$$x^2 - 10x - 22 > 10^{n+1}.$$

Cependant,

$$9^{n+1} \geq \prod_0^n a_k = p(x).$$

Puisque $10^{n+1} > 9^{n+1}$, il s'ensuit que

$$x^2 - 10x - 22 > p(x).$$

Par conséquent, l'équation **(E)** n'a pas de solution à trois chiffres ou plus.

5. Conclusion

Les développements menés ci-dessus permettent de conclure que 12 est l'unique solution de l'équation **(E)**.

Références

- [1] Monge, M. ; Lemaire-Body, F. ; Audouin-Egoroff, M.-C. ; **Mathématiques, Terminales C et E**, Tome 2 : Arithmétique, analyse et probabilités, Belin, Paris, 1974.