Propriétés sur les tangentes des paraboles et sur les miroirs paraboliques

Christian Nguembou Tagne

2 octobre 2022

Soit $(\mathcal{P})$ une parabole de sommet S, de foyer F et de directrice $(\mathcal{D})$. Alors, il existe un repère orthonormé $\left(S, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, dans lequel $(\mathcal{P})$ a pour équation $y^2 = 2px$. Au demeurant, une équation de la directrice $(\mathcal{D})$ et les coordonnées du foyer F sont données par

$$(\mathcal{D}) : x = -\frac{p}{2} \qquad \text{et} \qquad F\left(\frac{p}{2}, 0\right).$$

Propriété 1.

Soit M un point de la parabole distinct du sommet, et H son projeté orthogonal sur la directrice. La tangente à la parabole en M coupe sa tangente au sommet au milieu du segment $[FH]$.

Démonstration :

Soit $(\mathcal{T})$ la tangente à la parabole au point M. L'abscisse et l'ordonnée de M étant respectivement x_0 et y_0, la disjonction des cas $y_0 < 0$ et $y_0 > 0$ et des calculs simples permettent de montrer qu'une équation cartésienne de $(\mathcal{T})$ est $y_0 y = p(x + x_0)$. Ceci équivaut à

$$px - y_0 y + px_0 = 0.$$

Par ailleurs, $H\left(-\frac{p}{2}, y_0\right)$. Donc, l'abscisse du milieu I du segment $[FH]$ est

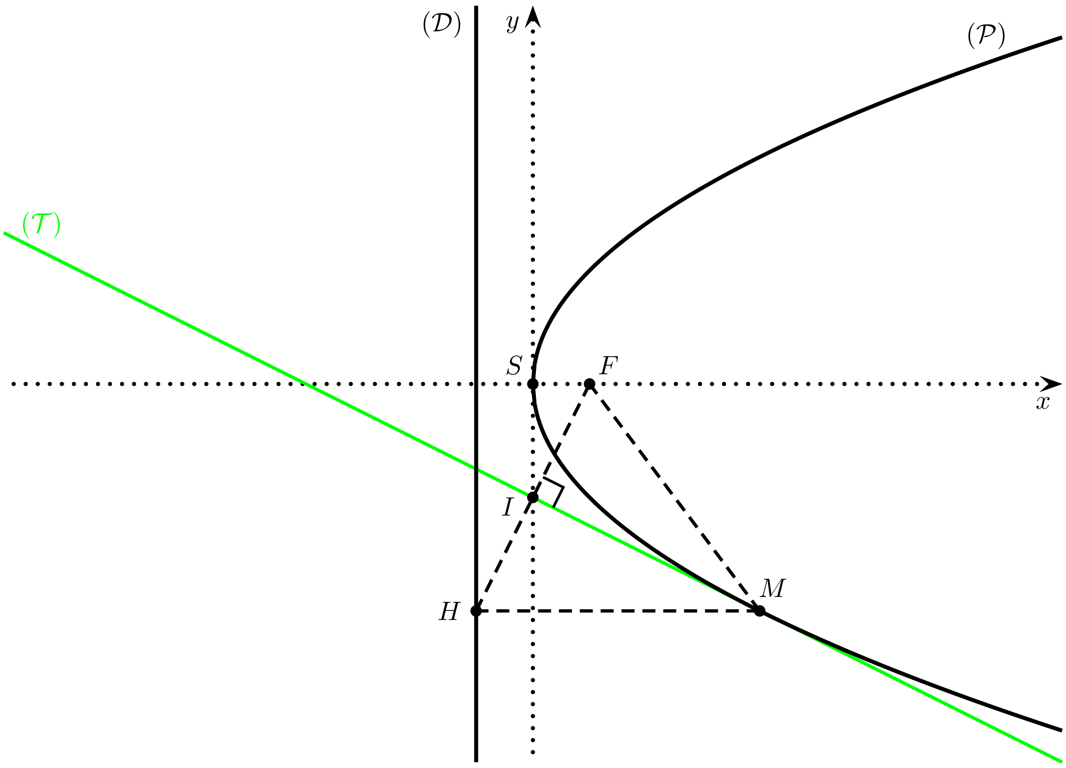
$$x_I = \frac{x_F + x_H}{2} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{p}{2} - \frac{p}{2}\right) = 0.$$

Le point I appartient de ce fait à l'axe des ordonnées $\left(S, \overrightarrow{j}\right)$, qui est du reste la tangente à la parabole $(\mathcal{P})$ au sommet S. Ainsi, pour conclure la démonstration, il suffit d'établir que la tangente $(\mathcal{T})$ passe par I. À cet effet, nous notons que $\overrightarrow{u}(y_0, p)$ est un vecteur directeur de $(\mathcal{T})$. De plus,

$$x_H - x_F = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} = -p \qquad \text{et} \qquad y_H - y_F = y_0 - 0 = y_0.$$

Par conséquent,

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{FH} = -y_0 p + y_0 p = 0,$$



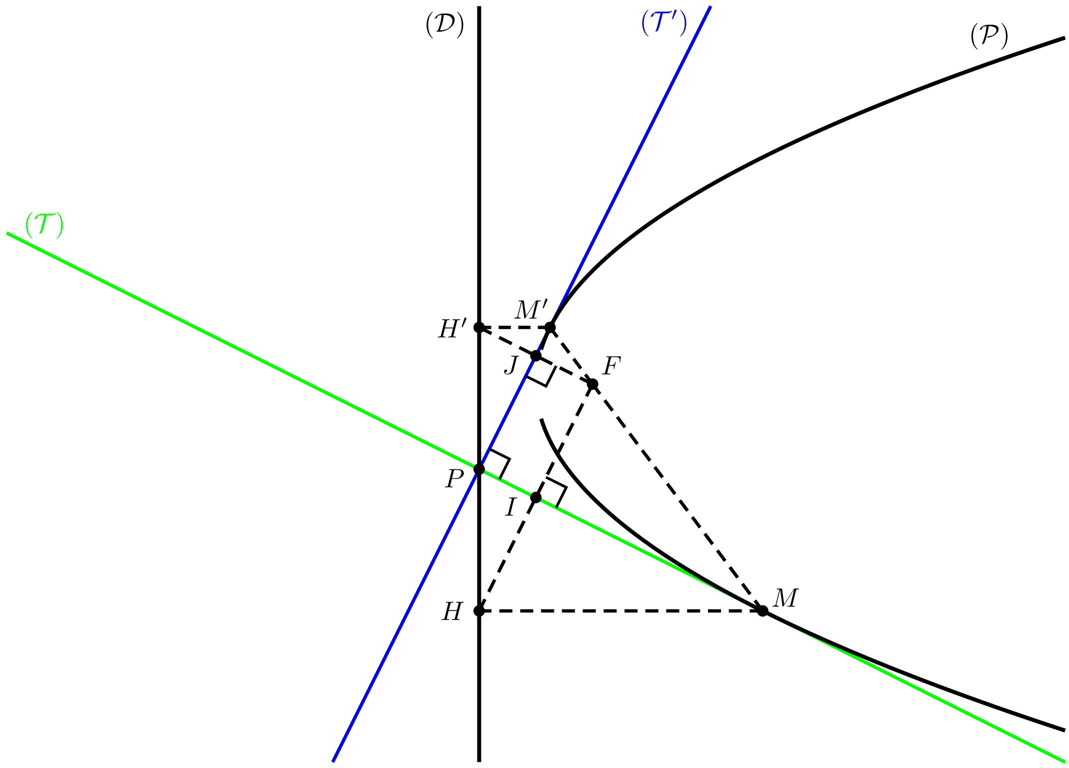
La tangente $(\mathcal{T})$ est donc perpendiculaire à la droite (FH). Ainsi, dans le triangle MFH, elle est la hauteur issue du point M. Cependant, par définition des paraboles, $MF = d(M, (\mathcal{D}))$, c'est-à-dire $MF = MH$. Ceci signifie que le triangle MFH est isocèle en M. Il en résulte que $(\mathcal{T})$ est la médiatrice du segment $[FH]$. De ce fait, le milieu I du segment $[FH]$ appartient à $(\mathcal{T})$. D'où $(\mathcal{T}) \cap \left(S, \overrightarrow{j}\right) = \{I\}$. $\square$

Propriété 2.

Deux tangentes à la parabole qui sont perpendiculaires se coupent sur la directrice.

Démonstration :

Soient M et M' des points distincts de la parabole $(\mathcal{P})$, puis $(\mathcal{T})$ et $(\mathcal{T}')$ les tangentes de $(\mathcal{P})$ respectivement en M et M'. Nous supposons que $(\mathcal{T})$ et $(\mathcal{T}')$ sont perpendiculaires en un point P. Alors, chacun des points M et M' est distinct du sommet S, car la tangente à $(\mathcal{P})$ en S est l'axe des ordonnées et aucune tangente de $(\mathcal{P})$ n'est parallèle à l'axe des abscisses. Maintenant, soient H et H' les projetés orthogonaux respectifs des points M et M' sur la directrice $(\mathcal{D})$. Alors, les tangentes $(\mathcal{T})$ et $(\mathcal{T}')$ sont les médiatrices respectives des segments $[FH]$ et $[FH']$ (voir la Propriété 1 ci-dessus).



Cependant, $(FH) \perp (\mathcal{T})$ et $(\mathcal{T}) \perp (\mathcal{T}')$ entraînent $(FH) \parallel (\mathcal{T}')$. En outre, $(FH) \parallel (\mathcal{T}')$ et $(\mathcal{T}') \perp (FH')$ induisent $(FH) \perp (FH')$. De ce fait, FHH' est un triangle rectangle en F. Ses médiatrices $(\mathcal{T})$ et $(\mathcal{T}')$ se rencontrent donc au milieu de l'hypoténuse $[HH']$. Puisque $[HH'] \subseteq (\mathcal{D})$, il en résulte que P, le point de rencontre des tangentes $(\mathcal{T})$ et $(\mathcal{T}')$, appartient à la directrice $(\mathcal{D})$. $\square$

Démonstration alternative (méthode analytique) :

Soient $M(x_0, y_0)$ et $M'(x_0', y_0')$ des points distincts de la parabole $(\mathcal{P})$, puis $(\mathcal{T})$ et $(\mathcal{T}')$ les tangentes de $(\mathcal{P})$ respectivement en M et M'. Nous supposons que $(\mathcal{T})$ et $(\mathcal{T}')$ sont perpendiculaires en un point P. Alors, chacun des points M et M' est distinct du sommet S, car la tangente à $(\mathcal{P})$ en S est l'axe des ordonnées et aucune tangente de $(\mathcal{P})$ n'est parallèle à l'axe des abscisses. Des équations cartésiennes de $(\mathcal{T})$ et $(\mathcal{T}')$ sont donc données par

$$(\mathcal{T}) : y_0 y = p(x + x_0) \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{T}') : y_0' y = p(x + x_0').$$

Ainsi, en raison de la relation $(\mathcal{T}) \perp (\mathcal{T}')$, nous avons $\frac{p}{y_0} \times \frac{p}{y_0'} = -1$, c'est-à-dire

$$y_0 y_0' = -p^2.$$

En outre, $y_0 \neq y_0'$. Le couple de coordonnées (x_P, y_P) est par conséquent l'unique solution du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} px - y_0 y = -px_0, \\ px - y_0' y = -px_0'. \end{cases}$$

Il en résulte que

$$x_P = \frac{\begin{vmatrix} -px_0 & -y_0 \\ -px_0' & -y_0' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p & -y_0 \\ p & -y_0' \end{vmatrix}} = \frac{px_0y_0' - py_0x_0'}{-py_0' + py_0} = \frac{x_0y_0' - y_0x_0'}{y_0 - y_0'}.$$

Cependant,

$$x_0 = \frac{y_0^2}{2p} \qquad \text{et} \qquad x_0' = \frac{(y_0')^2}{2p}.$$

Ceci entraîne

$$x_P = \frac{\frac{1}{2p}\left(y_0^2 y_0' - y_0^2 (y_0')^2\right)}{y_0 - y_0'} = \frac{\frac{1}{2p} y_0 y_0' (y_0 - y_0')}{y_0 - y_0'} = \frac{y_0 y_0'}{2p} = -\frac{p^2}{2p} = -\frac{p}{2}.$$

De ce fait, le point P, intersection des tangentes perpendiculaires $(\mathcal{T})$ et $(\mathcal{T}')$, appartient à la directrice $(\mathcal{D})$. $\square$

La **réflexion** sur une parabole, à chaque droite coupant la parabole, appelée **droite incidente**, associe une droite dite **réfléchie**. En l'espèce, la normale à la parabole au point d'intersection de la droite incidente et de la parabole est bissectrice de la droite incidente et de la droite réfléchie.

Propriété 3.

Les droites horizontales se réfléchissent sur la parabole en droites passant par son foyer.

Démonstration :

Soit $(\mathcal{G})$ une droite horizontale coupant la parabole $(\mathcal{P})$ en un point M. De plus, soit H le projeté orthogonal de M sur la directrice $(\mathcal{D})$, et A un point de $(\mathcal{G})$ situé à l'intérieur de la parabole $(\mathcal{P})$. Par ailleurs, nous désignons le milieu du segment $[FH]$ par I. Alors, la droite (MI) est la tangente à $(\mathcal{P})$ en M (voir la Propriété 1 ci-dessus).

Maintenant, soient B et N des points situés à l'intérieur de la parabole $(\mathcal{P})$ tels que :

- (MB) soit la droite réfléchie sur $(\mathcal{P})$ par $(\mathcal{G})$;
- (MN) soit la normale à la parabole en M.

Alors, par définition, (MN) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AMB}$. Ceci signifie que

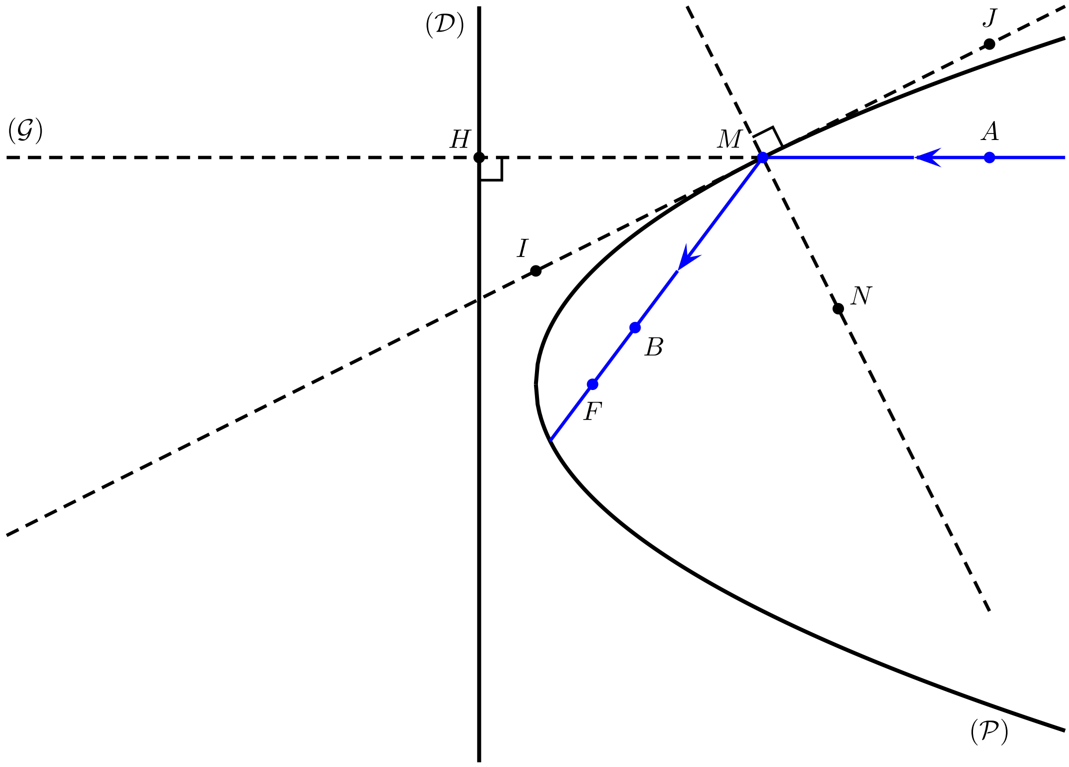
$$\textbf{Mes}\,\widehat{AMN} = \textbf{Mes}\,\widehat{BMN}.$$

Ainsi, J étant un point de la tangente (MI) tel que $M \in [IJ]$ et $M \neq J$, nous avons

$$\textbf{Mes}\,\widehat{IMB} = \frac{\pi}{2} - \textbf{Mes}\,\widehat{BMN} = \frac{\pi}{2} - \textbf{Mes}\,\widehat{AMN} = \textbf{Mes}\,\widehat{AMJ}.$$

Cependant,

$$\textbf{Mes}\,\widehat{AMJ} = \textbf{Mes}\,\widehat{HMI}.$$



Au demeurant, MFH est un triangle isocèle en M et la droite (MI) est sa médiatrice issue de M (voir la démonstration de la Propriété 1). De ce fait, (MI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{HMF}$. D'où $\textbf{Mes}\,\widehat{HMI} = \textbf{Mes}\,\widehat{IMF}$ et

$$\textbf{Mes}\,\widehat{IMB} = \textbf{Mes}\,\widehat{AMJ} = \textbf{Mes}\,\widehat{HMI} = \textbf{Mes}\,\widehat{IMF}.$$

Par conséquent, $[MB) = [MF)$. La droite réfléchie (MB) passe donc par le foyer F. $\square$