Numération et division euclidienne

Christian V. Nguembou Tagne

1er novembre 2022

Dans ce texte, nous proposons une solution à un exercice d'arithmétique tiré de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat C et E, de la session 2013 au Cameroun. Déterminer le chiffre des unités et le chiffre des dizaines d'un nombre est l'objectif ultime de cet exercice. Avant de proposer une solution, nous présentons l'énoncé original de l'exercice.

Énoncé de l'exercice

On désigne par N un entier naturel dont l'écriture en base 10 est

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}.$$

1. Démontrer que le reste de la division de N par 100 est l'entier r dont l'écriture en base 10 est $\overline{a_1 a_0}$.
2. **Application** : Démontrer que le chiffre des unités et le chiffre des dizaines de $N = 7^{7^{7^7}}$ sont respectivement 3 et 4.

La relation de congruence est au centre de la solution proposée ici. Nous mettons notamment à contribution le résultat suivant :

Propriété 1.

Étant donné un entier naturel non nul n, soient a et a' des entiers relatifs, puis r et r' les restes respectifs des divisions euclidiennes de a et a' par n. Alors, $a \equiv a' \,[\mathrm{mod.}\, n]$ si, et seulement si, $r = r'$.

En réalité, nous utilisons un corollaire de la propriété 1 ci-dessus. Ce corollaire se formule comme suit :

Propriété 2.

Étant donné un entier naturel n non nul, soient a et r des entiers relatifs vérifiant $0 \leqslant r \leqslant n-1$. Alors, r est le reste de la division euclidienne de a par n si, et seulement si, $a \equiv r \,[\mathrm{mod.}\, n]$.

1. Écriture en base dix et reste de la division euclidienne par 100

Soit N un entier naturel dont l'écriture en base 10 est

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}.$$

Alors, le reste de la division euclidienne de N par 100 est l'entier $r = \overline{a_1 a_0}$ en base 10.

Démonstration :

Par définition, les a_i sont des éléments de $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ et

$$N = \sum_{j=0}^{n} a_j 10^j = 10^n a_n + \cdots + 10a_1 + a_0.$$

Si $n \leqslant 1$, alors $N = 10a_1 + a_0 = 100 \times 0 + 10a_1 + a_0$. Si en revanche $n \geqslant 2$, alors

$$N = \left(\sum_{j=2}^{n} a_j 10^j\right) + 10a_1 + a_0 = 10^2 \left(\sum_{j=2}^{n} a_j 10^{j-2}\right) + 10a_1 + a_0.$$

Dans tous les cas, il existe un entier relatif q tel que

$$N = 100q + 10a_1 + a_0.$$

Or, $0 \leqslant 10a_1 + a_0 \leqslant 99$, car $0 \leqslant a_0 \leqslant 9$ et $0 \leqslant a_1 \leqslant 9$. D'où $r = 10a_1 + a_0$ est le reste de la division euclidienne de N par 100. À l'évidence, $\overline{a_1 a_0}$ est l'écriture de r en base 10. $\square$

2. Détermination des chiffres des unités et des dizaines d'un grand nombre

Nous allons utiliser le résultat démontré dans la section précédente pour déterminer le chiffre des unités et des dizaines de nombre

$$N = 7^{7^{7^7}}.$$

Notons tout d'abord que la définition de N est ambigüe. En effet, nous pouvons lire

$$N = 7^{\left(7^{\left(7^7\right)}\right)} \qquad \text{ou} \qquad N = \left(\left(7^7\right)^7\right)^7.$$

Une règle sur la priorité des opérations préconise pour les exponentiations successives de calculer du haut vers le bas. Selon cette règle, la première interprétation est la bonne. Mais cette règle n'est pas universelle. À notre sens, il aurait fallu lever toute ambiguïté au moyen de parenthèses. Toutefois, nous allons répondre à la question dans les deux cas.

2.1. Première interprétation

Soit $N = 7^x$, où $x = 7^y$ avec $y = 7^7$. Nous cherchons un nombre entier r vérifiant

$$0 \leqslant r \leqslant 99 \qquad \text{et} \qquad N \equiv r\,[\text{mod.}\,100].$$

À cet effet, nous notons que

$$\begin{aligned} 7^1 &\equiv 7\,[\text{mod.}\,100], \\ 7^2 &\equiv 49\,[\text{mod.}\,100], \\ 7^3 = 343 &\equiv 43\,[\text{mod.}\,100], \\ 7^4 = 2401 &\equiv 1\,[\text{mod.}\,100]. \end{aligned}$$

Ceci permet de dresser le tableau des congruences modulo 100 des puissances de 7.

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
Congruence modulo 100 de 7^n	1	7	49	43

Par ailleurs,

$$7^1 \equiv 3\,[\text{mod.}\,4] \qquad \text{et} \qquad 7^2 = 49 = 4 \times 12 + 1 \equiv 1\,[\text{mod.}\,4].$$

De ce fait,

$$\begin{cases} 7^m \equiv 1\,[\text{mod.}\,4] & \text{si} \;\; m \text{ est pair;} \\ 7^m \equiv 3\,[\text{mod.}\,4] & \text{si} \;\; m \text{ est impair.} \end{cases} \tag{$\diamond$}$$

Le nombre $y = 7^7$ étant impair, en tant que produit de nombres impairs, il en résulte que $x = 7^y \equiv 3\,[\text{mod.}\,4]$. De ce fait, compte tenu du tableau des congruences modulo 100 des puissances de 7 ci-dessus, $N = 7^x \equiv 43\,[\text{mod.}\,100]$. En vertu de la propriété 2, il s'ensuit que 43 est le reste de la division euclidienne de N par 100. Par conséquent, 3 est le chiffre des unités de N et 4 son chiffre des dizaines.

2.2. Seconde interprétation

Soit $N = \left(\left(7^7\right)^7\right)^7$. Alors,

$$N = \left(7^7\right)^{7\times 7} = 7^{7\times 7\times 7} = 7^{\left(7^3\right)}.$$

Or, $7^3 \equiv 3\,[\text{mod.}\,4]$, d'après ($\diamond$). Ceci entraîne $N \equiv 43\,[\text{mod.}\,100]$. Donc, 3 est le chiffre des unités de N et 4 son chiffre des dizaines.

3. Généralisation

Dans cette section, nous considérons les suites d'entiers naturels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies respectivement de manière récurrente par

$$u_0 = 7 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = 7^{u_n} \ \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

puis

$$v_0 = 7 \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = v_n^7 \ \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

De manière schématique, nous avons donc

$$u_n = \underbrace{7^{\left(7^{\cdots^{\left(7^7\right)}}\right)}}_{(n+1)\text{ fois } 7} \qquad \text{et} \qquad v_n = \underbrace{\left(\ldots\left(\left(7^7\right)^7\right)^{\cdots}\right)^7}_{(n+1)\text{ fois } 7}.$$

3.1. Chiffres des unités et des dizaines des termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Nous montrons par récurrence que $u_n \equiv 43\,[\mathrm{mod.}\,100]$ pour chaque entier naturel non nul n. En effet, puisque $7 = 4\times 1+3$, le tableau des congruences des puissances de 7 ci-dessus livre $7^7 \equiv 43\,[\mathrm{mod.}\,100]$, c'est-à-dire

$$u_1 \equiv 43\,[\mathrm{mod.}\,100].$$

Si $u_n \equiv 43\,[\mathrm{mod.}\,100]$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné, alors il existe un entier k vérifiant

$$u_n = 100k + 43 = 4(25k+10) + 3 \equiv 3\,[\mathrm{mod.}\,4],$$

et donc $u_{n+1} = 7^{u_n} \equiv 43\,[\mathrm{mod.}\,100]$. Par conséquent, pour chaque entier naturel non nul n, 3 et 4 sont respectivement chiffre des unités et chiffre des dizaines de l'entier naturel u_n.

3.2. Chiffres des unités et des dizaines des termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

À l'évidence, $v_0 = 7^{(7^0)}$. Nous montrons facilement par récurrence que

$$v_n = 7^{(7^n)}$$

pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Cependant, $7^n \equiv 1\,[\mathrm{mod.}\,4]$ si n est pair, tandis que $7^n \equiv 3\,[\mathrm{mod.}\,4]$ si n est impair. De ce fait,

$$\begin{cases} v_n \equiv 07\,[\mathrm{mod.}\,4] & \text{si } \ n \text{ est pair;} \\[2ex] v_n \equiv 43\,[\mathrm{mod.}\,4] & \text{si } \ n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Par conséquent, si n est pair, le chiffre des unités et le chiffre des dizaines de v_n sont respectivement 7 et 0. Si en revanche n est impair, 3 et 4 sont respectivement chiffre des unités et chiffre des dizaines de v_n.