Somme d'entiers relatifs et divisibilité par 3

Christian V. Nguembou Tagne

21 mars 2023

Dans cette contribution, nous démontrons la propriété suivante :

> Dans n'importe quel ensemble constitué de cinq entiers relatifs différents, il est toujours possible de trouver trois éléments dont la somme est divisible par 3.

Démonstration

Étant donné un ensemble E constitué de cinq entiers relatifs différents, soit f l'application de E vers $\{0,1,2\}$ qui, à chaque élément de E, associe son reste pour la division euclidienne par 3. Autrement dit, pour tout $x \in E$, l'expression $f(x)$ désigne le reste de division de x par 3. Par définition, quel que soit $x \in E$, nous avons

$$x \equiv f(x)\,[\text{mod.}\,3].$$

Pour chaque élément m de l'ensemble d'arrivée $\{0,1,2\}$ de f, nous posons

$$E_m = \Big\{x \in E \;:\; f(x) = m\Big\}.$$

En d'autres termes, E_m est l'ensemble des antécédents de m par f. Clairement, les ensembles E_0, E_1 et E_2 sont deux-à-deux disjoints, et leur réunion est égale à l'ensemble de départ E. De ce fait, la somme des cardinaux de ces ensembles est égale au cardinal de E, c'est-à-dire

$$\operatorname{card}(E_0) + \operatorname{card}(E_1) + \operatorname{card}(E_2) = 5. \tag{†}$$

Nous souhaitons montrer qu'il existe dans E trois éléments distincts a, b et c vérifiant

$$a + b + c \equiv 0\,[\text{mod.}\,3].$$

À cet effet, nous allons faire une disjonction des cas.

Premier cas : Dans l'ensemble d'arrivée $\{0,1,2\}$ de f, il existe un élément m ayant au moins trois antécédents distincts par f. Nous avons donc dans E trois éléments distincts a, b et c tels que $f(a) = f(b) = f(c) = m$. De ce fait,

$$a + b + c \equiv 3m\,[\text{mod. } 3] \equiv 0\,[\text{mod. } 3].$$

Second cas : Chaque élément de l'ensemble d'arrivée $\{0,1,2\}$ de f possède au plus deux antécédents par f. Ceci signifie que, pour chaque $m \in \{0,1,2\}$, le cardinal de l'ensemble E_m des antécédents de m est inferieur ou égal à 2. Alors, aucun des ensembles E_0, E_1 et E_2 n'est vide ; en effet, le contraire entraînerait $\text{card}(E_i) = 0$ pour un $i \in \{0,1,2\}$, et donc

$$\text{card}(E_0) + \text{card}(E_1) + \text{card}(E_2) = \text{card}(E_i) + \text{card}(E_j) + \text{card}(E_k) \leqslant 0 + 2 + 2 < 5 :$$

une contradiction de l'égalité (†). Ainsi, l'application f est surjective. De ce fait, il existe dans E des entiers distincts a, b et c tels que $f(a) = 0$, puis $f(b) = 1$ et $f(c) = 2$. D'où

$$a + b + c \equiv 0 + 1 + 2\,[\text{mod. } 3] \equiv 0\,[\text{mod. } 3].$$

En tout état de cause, dans l'ensemble E, il existe trois éléments distincts dont la somme est divisible par 3. Ceci conclut la démonstration.