Rang d'une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^4$

Christian V. Nguembou Tagne

23 mai 2023

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $\alpha \in \mathbb{K}$. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{K}^4$, nous considérons la famille $\mathcal{F}_\alpha = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, où

$$\begin{aligned} x_1 &= (1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3), \\ x_2 &= (\alpha, \alpha^2, \alpha^3, 1), \\ x_3 &= (\alpha^2, \alpha^3, 1, \alpha), \\ x_4 &= (\alpha^3, 1, \alpha, \alpha^2), \\ x_5 &= (1, -1, 1, -1). \end{aligned}$$

Dans cette note, nous allons déterminer, suivant les valeurs de α, le rang de la famille $\mathcal{F}_\alpha$.

Dans la première section de la note, nous discutons du cas général, où $\mathbb{K}$ est corps commutatif quelconque. Dans la seconde section, nous explicitons la discussion pour les cas suivants : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec $p \in \{2, 3, 5\}$.

1. Cas général

Soit ϱ_α le rang de la famille $\mathcal{F}_\alpha$. Alors, par définition, ϱ_α est la dimension du sous-espace de $\mathbb{K}^4$ engendré par l'ensemble $A_\alpha = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Il s'agit de l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A_α. Ainsi, ϱ_α est le rang de l'application linéaire

$$U : \mathbb{K}^5 \to \mathbb{K}^4, \;\; (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \mapsto \sum_{j=1}^{5} \lambda_j x_j.$$

Cependant, d'après le **théorème du rang**,

$$\operatorname{rang}(U) + \dim \operatorname{Ker}(U) = \dim \mathbb{K}^5.$$

Ceci entraîne

$$\varrho_\alpha = \operatorname{rang}(U) = 5 - \dim \operatorname{Ker}(U).$$

Pour obtenir la valeur de ϱ_α, il suffit donc de déterminer la dimension du noyau de U. À cet effet, considérons des scalaires λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 et λ_5. Alors,

$$\begin{aligned}
\lambda_1 x_1 &= (\lambda_1, \alpha\lambda_1, \alpha^2\lambda_1, \alpha^3\lambda_1),\\
\lambda_2 x_2 &= (\alpha\lambda_2, \alpha^2\lambda_2, \alpha^3\lambda_2, \lambda_2),\\
\lambda_3 x_3 &= (\alpha^2\lambda_3, \alpha^3\lambda_3, \lambda_3, \alpha\lambda_3),\\
\lambda_4 x_4 &= (\alpha^3\lambda_4, \lambda_4, \alpha\lambda_4, \alpha^2\lambda_4),\\
\lambda_5 x_5 &= (\lambda_5, -\lambda_5, \lambda_5, -\lambda_5).
\end{aligned}$$

De ce fait, pour que le vecteur $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$ de $\mathbb{K}^5$ appartienne au noyau de U, c'est-à-dire $\sum\limits_{j=1}^{5} \lambda_j x_j = 0$, il faut et il suffit que

$$\left\{\begin{array}{l}
\lambda_1 + \alpha\lambda_2 + \alpha^2\lambda_3 + \alpha^3\lambda_4 + \lambda_5 = 0,\\
\alpha\lambda_1 + \alpha^2\lambda_2 + \alpha^3\lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_5 = 0,\\
\alpha^2\lambda_1 + \alpha^3\lambda_2 + \lambda_3 + \alpha\lambda_4 + \lambda_5 = 0,\\
\alpha^3\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha\lambda_3 + \alpha^2\lambda_4 - \lambda_5 = 0.
\end{array}\right. \tag{$\mathbf{S}$}$$

Pour résoudre le système ($\mathbf{S}$), nous allons utiliser la **méthode d'élimination de Gauss**. Dans cette intention, nous soustrayons tout d'abord aux deuxième, troisième et quatrième lignes, la première ligne multipliée respectivement par les scalaires α, α^2 et α^3. Nous obtenons alors que le système ($\mathbf{S}$) est équivalent au suivant :

$$\left\{\begin{array}{r}
\lambda_1 + \alpha\lambda_2 + \alpha^2\lambda_3 + \alpha^3\lambda_4 + \lambda_5 = 0,\\
(1-\alpha^4)\lambda_4 - (1+\alpha)\lambda_5 = 0,\\
(1-\alpha^4)\lambda_3 + (\alpha-\alpha^5)\lambda_4 + (1-\alpha^2)\lambda_5 = 0,\\
(1-\alpha^4)\lambda_2 + (\alpha-\alpha^5)\lambda_3 + (\alpha^2-\alpha^6)\lambda_4 - (1+\alpha^3)\lambda_5 = 0.
\end{array}\right.$$

Ceci équivaut à

$$\left\{\begin{array}{r}
(1-\alpha^4)(\lambda_2 + \alpha\lambda_3 + \alpha^2\lambda_4) - (1+\alpha^3)\lambda_5 = 0,\\
\lambda_1 + \alpha\lambda_2 + \alpha^2\lambda_3 + \alpha^3\lambda_4 + \lambda_5 = 0,\\
(1+\alpha)\Big[(1-\alpha)(1+\alpha^2)\lambda_4 - \lambda_5\Big] = 0,\\
(1-\alpha^2)\Big[(1+\alpha^2)\lambda_3 + \alpha(1+\alpha^2)\lambda_4 + \lambda_5\Big] = 0.
\end{array}\right.$$

Rendu à cette étape de la résolution du système ($\mathbf{S}$), nous pouvons engager la discussion.

Premier cas : Soit $\alpha = 0$. Alors,

$$\begin{aligned}
x_1 &= (1, 0, 0, 0),\\
x_2 &= (0, 0, 0, 1),\\
x_3 &= (0, 0, 1, 0),\\
x_4 &= (0, 1, 0, 0),\\
x_5 &= (1, -1, 1, -1).
\end{aligned}$$

La famille (x_1, x_4, x_3, x_2) est donc la base canonique de $\mathbb{K}^4$. De ce fait, $\mathcal{F}_0$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^4$. Ainsi, le sous-espace vectoriel $[A_0]$, engendré par $A_0 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, est l'espace entier $\mathbb{K}^4$. Par conséquent,

$$\varrho_0 = \mathrm{rang}(\mathcal{F}_0) = \dim[A_0] = \dim \mathbb{K}^4 = 4.$$

Deuxième cas : Soit $\alpha = 1$. Alors,

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = (1, 1, 1, 1) \qquad \text{et} \qquad x_5 = (1, -1, 1, -1).$$

Si le corps $\mathbb{K}$ est de caractéristique 2, alors $-1 = 1$ et $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$, puis

$$[A_1] = [\{x_1\}] = \mathbb{K} \cdot x_1,$$

et donc $\varrho_1 = \dim(\mathbb{K} \cdot x_1) = 1$.

Si le corps $\mathbb{K}$ est de caractéristique distincte de 2, alors

$$[A_1] = [\{x_1, x_2\}].$$

Le cas échéant, pour des scalaires λ_1 et λ_5, l'égalité $\lambda_1 x_1 + \lambda_5 x_5 = (0, 0, 0, 0)$, c'est-à-dire

$$(\lambda_1 + \lambda_5, \lambda_1 - \lambda_5, \lambda_1 + \lambda_5, \lambda_1 - \lambda_5) = (0, 0, 0, 0),$$

est équivalente à $\lambda_1 + \lambda_5 = 0$ et $\lambda_1 - \lambda_5 = 0$, c'est-à-dire $2\lambda_1 = 0$ et $\lambda_1 = \lambda_5$. Ceci entraîne $\lambda_1 = \lambda_5 = 0$. Donc, (x_1, x_5) est une famille libre. De ce fait,

$$\varrho_1 = \dim\big[\{x_1, x_2\}\big] = \dim(\mathbb{K} \cdot x_1 \oplus \mathbb{K} \cdot x_2) = 2.$$

Par conséquent,

$$\varrho_1 = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbb{K} \text{ est de caractéristique 2,} \\ 2 & \text{si } \mathbb{K} \text{ est de caractéristique distincte de 2.} \end{cases}$$

Troisième cas : Soit $\alpha = -1$. Alors,

$$x_1 = x_3 = x_5 = (1, -1, 1, -1) \qquad \text{et} \qquad x_2 = x_4 = (-1, 1, -1, 1) = -x_1.$$

Il en résulte que

$$[A_{-1}] = [\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}] = [\{x_1\}] = \mathbb{K} \cdot x_1.$$

De ce fait, $\varrho_{-1} = \dim(\mathbb{K} \cdot x_1) = 1$.

Quatrième cas : Soit $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{-1, 0, 1\}$ et $\alpha^2 = -1$. Alors, $\alpha^3 = -\alpha$, puis

$$\begin{aligned} x_1 &= (1, \alpha, -1, -\alpha), \\ x_2 &= (\alpha, -1, -\alpha, 1) = \alpha x_1, \\ x_3 &= (-1, -\alpha, 1, \alpha) = \alpha^2 x_1, \\ x_4 &= (-\alpha, 1, \alpha, -1) = \alpha^3 x_1, \\ x_5 &= (1, -1, 1, -1). \end{aligned}$$

De ce fait, le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs de la famille $\mathcal{F}_\alpha$ est

$$[A_\alpha] = [\{x_1, x_5\}].$$

Cependant, pour des scalaires λ_1 et λ_5, l'égalité $\lambda_1 x_1 + \lambda_5 x_5 = (0,0,0,0)$, c'est-à-dire

$$(\lambda_1 + \lambda_5, \alpha\lambda_1 - \lambda_5, -\lambda_1 + \lambda_5, -\alpha\lambda_1 - \lambda_5) = (0,0,0,0),$$

entraîne $\lambda_1 + \lambda_5 = 0$ et $-\lambda_1 + \lambda_5 = 0$, puis $\lambda_1 = \lambda_5 = 0$. Donc, (x_1, x_5) est une famille libre. Par conséquent,

$$\varrho_\alpha = \dim[\{x_1, x_5\}] = \dim(\mathbb{K} \cdot x_1 \oplus \mathbb{K} \cdot x_5) = 2.$$

Cinquième cas : Soit $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{-1, 0, 1\}$ et $\alpha^2 \neq -1$. Alors,

$$1 + \alpha^2 \neq 0 \qquad \text{et} \qquad 1 - \alpha^4 \neq 0.$$

De ce fait, le système $(\mathbf{S})$ introduit plus haut est équivalent à

$$\left\{\begin{aligned} (1-\alpha^4)(\lambda_2 + \alpha\lambda_3 + \alpha^2\lambda_4) - (1+\alpha^3)\lambda_5 &= 0,\\ \lambda_1 + \alpha\lambda_2 + \alpha^2\lambda_3 + \alpha^3\lambda_4 + \lambda_5 &= 0,\\ (1-\alpha)(1+\alpha^2)\lambda_4 - \lambda_5 &= 0,\\ (1+\alpha^2)\lambda_3 + \alpha(1+\alpha^2)\lambda_4 + \lambda_5 &= 0,\end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_5 = (1-\alpha)(1+\alpha^2)\lambda_4,\\ (1+\alpha^2)\lambda_3 + \alpha(1+\alpha^2)\lambda_4 + (1-\alpha)(1+\alpha^2)\lambda_4 = 0,\\ (1-\alpha^4)(\lambda_2 + \alpha\lambda_3 + \alpha^2\lambda_4) - (1+\alpha^3)\lambda_5 = 0,\\ \lambda_1 + \alpha\lambda_2 + \alpha^2\lambda_3 + \alpha^3\lambda_4 + \lambda_5 = 0,\end{array}\right.$$

ou encore

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_5 = (1-\alpha)(1+\alpha^2)\lambda_4,\\ \lambda_3 + \lambda_4 = 0,\\ (1-\alpha^4)(\lambda_2 + \alpha\lambda_3 + \alpha^2\lambda_4) - (1+\alpha^3)\lambda_5 = 0,\\ \lambda_1 + \alpha\lambda_2 + \alpha^2\lambda_3 + \alpha^3\lambda_4 + \lambda_5 = 0.\end{array}\right.$$

Le système $(\mathbf{S})$ est donc équivalent à

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_4 = -\lambda_3,\\ \lambda_5 = -(1-\alpha)(1+\alpha^2)\lambda_3,\\ (1-\alpha^4)(\lambda_2 + \alpha\lambda_3 + \alpha^2\lambda_4) - (1+\alpha^3)\lambda_5 = 0,\\ \lambda_1 + \alpha\lambda_2 + \alpha^2\lambda_3 + \alpha^3\lambda_4 + \lambda_5 = 0.\end{array}\right.$$

Dans la troisième équation du système précédent, en remplaçant les expressions de λ_4 et λ_5, données par les deux premières équations, nous obtenons

$$(1-\alpha^4)(\lambda_2 + \alpha\lambda_3 - \alpha^2\lambda_3) + (1+\alpha^3)(1-\alpha)(1+\alpha^2)\lambda_3 = 0.$$

Or, $1+\alpha^3 = (1+\alpha)(1-\alpha+\alpha^2)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}(1+\alpha^3)(1-\alpha)(1+\alpha^2) &= (1+\alpha)(1-\alpha+\alpha^2)(1-\alpha)(1+\alpha^2)\\ &= (1-\alpha+\alpha^2)(1-\alpha^2)(1+\alpha^2)\\ &= (1-\alpha+\alpha^2)(1-\alpha^4).\end{aligned}$$

Donc,

$$(1-\alpha^4)(\lambda_2+\alpha\lambda_3-\alpha^2\lambda_3)+(1-\alpha+\alpha^2)(1-\alpha^4)\lambda_3 = 0.$$

Puisque $1-\alpha^4 \neq 0$, ceci équivaut à

$$\lambda_2+\alpha\lambda_3-\alpha^2\lambda_3+(1-\alpha+\alpha^2)\lambda_3 = 0,$$

c'est-à-dire $\lambda_2+\lambda_3 = 0$. Il en résulte que le système $(\mathbf{S})$ équivaut à

$$\begin{cases}\lambda_3 = -\lambda_2,\\ \lambda_4 = \lambda_2,\\ \lambda_5 = (1-\alpha)(1+\alpha^2)\lambda_2,\\ \lambda_1+\alpha\lambda_2-\alpha^2\lambda_2+\alpha^3\lambda_2+(1+\alpha)(1+\alpha^2)\lambda_2 = 0,\end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases}\lambda_3 = -\lambda_2,\\ \lambda_4 = \lambda_2,\\ \lambda_5 = (1-\alpha)(1+\alpha^2)\lambda_2,\\ \lambda_1+\alpha\lambda_2-\alpha^2\lambda_2+\alpha^3\lambda_2+(1+\alpha^2-\alpha-\alpha^3)\lambda_2 = 0.\end{cases}$$

De ce fait, le système $(\mathbf{S})$ est équivalent à

$$\begin{cases}\lambda_1 = -\lambda_2,\\ \lambda_3 = -\lambda_2,\\ \lambda_4 = \lambda_2,\\ \lambda_5 = (1-\alpha)(1+\alpha^2)\lambda_2.\end{cases}$$

Nous en déduisons qu'un vecteur $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5)$ de $\mathbb{K}^5$ appartient au noyau de U, l'application linéaire associée à la famille $\mathcal{F}_\alpha$, si, et seulement si,

$$\begin{aligned}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5) &= \big(-\lambda_2,\lambda_2,-\lambda_2,\lambda_2,(1-\alpha)(1+\alpha^2)\lambda_2\big)\\ &= \lambda_2\cdot\big(-1,1,-1,1,(1-\alpha)(1+\alpha^2)\big).\end{aligned}$$

Il en découle que

$$\operatorname{Ker}(U) = \mathbb{K}\cdot\big(-1,1,-1,1,(1-\alpha)(1+\alpha^2)\big).$$

Donc, $\dim\operatorname{Ker}(U) = 1$. Par conséquent,

$$\varrho_\alpha = 5-\dim\operatorname{Ker}(U) = 5-1 = 4.$$

✍

Tout compte fait, $\mathrm{car}(\mathbb{K})$ désignant la caractéristique du corps commutatif $\mathbb{K}$, nous avons

$$\varrho_\alpha = \begin{cases} 4 & \text{si } \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{-1, 1\} \text{ et } \alpha^2 \neq -1, \\ 2 & \text{si } [\alpha = 1 \text{ et } \mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2], \text{ ou si } \alpha^2 = -1, \\ 1 & \text{si } [\alpha = 1 \text{ et } \mathrm{car}(\mathbb{K}) = 2], \text{ ou si } \alpha = -1. \end{cases}$$

2. Cas particuliers

Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Le corps $\mathbb{C}$ est de caractéristique nulle. De plus, pour qu'un nombre complexe α vérifie $\alpha^2 = -1$, il faut et il suffit que $\alpha \in \{i, -i\}$. Par conséquent,

$$\varrho_\alpha = \begin{cases} 4 & \text{si } \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1, i, -i\}, \\ 2 & \text{si } \alpha \in \{1, i, -i\}, \\ 1 & \text{si } \alpha = -1. \end{cases}$$

Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Le corps $\mathbb{R}$ est de caractéristique nulle. En outre, $\alpha^2 \neq -1$ pour tout réel α. D'où

$$\varrho_\alpha = \begin{cases} 4 & \text{si } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \\ 2 & \text{si } \alpha = 1, \\ 1 & \text{si } \alpha = -1. \end{cases}$$

Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$

Le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est de caractéristique 2. Par conséquent,

$$\varrho_\alpha = \begin{cases} 4 & \text{si } \alpha = 0, \\ 1 & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{0, 1, 2\}$

Le corps $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est de caractéristique 3. Du reste, $-1 = 2$. De ce fait,

$$\varrho_\alpha = \begin{cases} 4 & \text{si } \alpha = 0, \\ 2 & \text{si } \alpha = 1, \\ 1 & \text{si } \alpha = 2. \end{cases}$$

Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Le corps $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ est de caractéristique 5. Par ailleurs, $-1 = 4$, puis $2^2 = 4 = -1$ et $3^2 = 4 = -1$. Donc,

$$\varrho_\alpha = \begin{cases} 4 & \text{si } \alpha = 0, \\ 2 & \text{si } \alpha \in \{1, 2, 3\}, \\ 1 & \text{si } \alpha = 4. \end{cases}$$

Références

[1] L. Chambadal et J.-L. Ovaert, **Algèbre linéaire et algèbre tensorielle**, Dunod, Paris, 1968.