# Rang d'une application linéaire de $\mathbb{K}^4$ dans $\mathbb{K}^6$

Christian V. Nguembou Tagne

14 mai 2023

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Nous considérons les espaces vectoriels $\mathbb{K}^4$ et $\mathbb{K}^6$ munis de leurs bases canoniques, et l'application linéaire $U$ de $\mathbb{K}^4$ dans $\mathbb{K}^6$ qui associe au vecteur $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ le vecteur $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5, \eta_6)$ défini par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \xi_2 - \xi_1, \\ \eta_2 &= \xi_3 - \xi_1, \\ \eta_3 &= \xi_4 - \xi_1, \\ \eta_4 &= \xi_3 - \xi_2, \\ \eta_5 &= \xi_4 - \xi_2, \\ \eta_1 &= \xi_4 - \xi_3. \end{aligned}$$

Pour déterminer le rang de l'application linéaire $U$, nous allons faire usage du *théorème du rang*. À cet effet, il convient de déterminer le noyau de $U$.

Soit $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ un élément du noyau de $U$. Alors,

$$\xi_2 - \xi_1 = 0, \qquad \xi_3 - \xi_1 = 0, \qquad \xi_4 - \xi_1 = 0,$$

puis

$$\xi_3 - \xi_2 = 0, \qquad \xi_4 - \xi_2 = 0, \qquad \xi_4 - \xi_3 = 0.$$

Ceci induit $\xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_1$. Ainsi, $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = (\xi_1, \xi_1, \xi_1, \xi_1) = \xi_1 \cdot (1, 1, 1, 1)$. D'où

$$\operatorname{Ker}(U) \subset \mathbb{K} \cdot (1, 1, 1, 1).$$

Pour établir l'inclusion réciproque, nous notons que $U(1, 1, 1, 1) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Donc, $(1, 1, 1, 1) \in \operatorname{Ker}(U)$. De ce fait, $\mathbb{K} \cdot (1, 1, 1, 1) \subset \operatorname{Ker}(U)$. Par conséquent,

$$\operatorname{Ker}(U) = \mathbb{K} \cdot (1, 1, 1, 1).$$

D'après le *théorème du rang*, il en résulte que

$$\operatorname{rang}(U) = \dim \mathbb{K}^4 - \dim \operatorname{Ker}(U) = 4 - 1 = 3.$$

## Références

[1] L. Chambadal et J.-L. Ovaert, **Algèbre linéaire et algèbre tensorielle**, Dunod, Paris, 1968.