Applications linéaires d'une somme directe d'espaces vectoriels dans un produit d'espaces vectoriels

Christian V. Nguembou Tagne

1er juin 2023

Dans cette note, nous introduisons l'isomorphisme canonique, de l'espace vectoriel des applications linéaires d'une somme directe dans un produit, sur un produit d'espaces vectoriels d'applications linéaires. Nous examinerons également quelques cas particuliers de cet isomorphisme.

1. Cas général

Proposition.

Soient $(E_j)_{j\in J}$ et $(F_i)_{i\in I}$ deux familles d'espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Pour tout $k \in J$ soit In_k l'injection canonique de E_k dans $E = \bigoplus\limits_{j\in J} E_j$ et, pour tout $\ell \in I$, soit Pr_ℓ le projecteur canonique de $F = \prod\limits_{i\in I} F_i$ sur F_ℓ. Alors, l'application Φ qui, à tout élément U de $\mathscr{L}(E, F)$, associe l'élément $\left(\mathrm{Pr}_\ell \circ U \circ \mathrm{In}_k\right)_{(\ell,k)\in I\times J}$ de $\prod\limits_{(\ell,k)\in I\times J} \mathscr{L}(E_k, F_\ell)$, est un isomorphisme, dit **canonique**, de l'espace vectoriel $\mathscr{L}(E, F)$ sur l'espace vectoriel

$$\prod_{(\ell,k)\in I\times J} \mathscr{L}(E_k, F_\ell).$$

Démonstration :

Nous allons d'abord montrer que l'application Φ est linéaire, puis qu'elle est injective et surjective.

Linéarité de l'application Φ

Soient U et V des éléments de $\mathscr{L}(E, F)$, puis α et β des scalaires. Alors, par définition,

$$\Phi(\alpha U + \beta V) = \Big(\mathrm{Pr}_\ell \circ (\alpha U + \beta V) \circ \mathrm{In}_k\Big)_{(\ell,k)\in I\times J}.$$

Par ailleurs, pour tout couple $(\ell,k)\in I\times J$ et chaque vecteur $x_k\in E_k$, nous avons

$$\begin{aligned}\Big[\mathrm{Pr}_\ell\circ(\alpha U+\beta V)\circ\mathrm{In}_k\Big](x_k) &= \mathrm{Pr}_\ell\Big(\alpha U[\mathrm{In}_k(x_k)]+\beta V[\mathrm{In}_k(x_k)]\Big)\\ &= \alpha(\mathrm{Pr}_\ell\circ U\circ\mathrm{In}_k)(x_k)+\beta(\mathrm{Pr}_\ell\circ V\circ\mathrm{In}_k)(x_k).\end{aligned}$$

De ce fait,

$$\Big(\mathrm{Pr}_\ell\circ(\alpha U+\beta V)\circ\mathrm{In}_k\Big)_{(\ell,k)\in I\times J}=\alpha\Big(\mathrm{Pr}_\ell\circ U\circ\mathrm{In}_k\Big)_{(\ell,k)\in I\times J}+\beta\Big(\mathrm{Pr}_\ell\circ V\circ\mathrm{In}_k\Big)_{(\ell,k)\in I\times J}.$$

Ceci signifie que $\Phi(\alpha U+\beta V)=\alpha\Phi(U)+\beta\Phi(V)$.

Injectivité de l'application Φ

Soit U un élément de $\mathscr{L}(E,F)$ tel que $\Phi(U)=0$. Alors, $(\mathrm{Pr}_\ell\circ U\circ\mathrm{In}_k)(x_k)=0$ pour chaque couple $(\ell,k)\in I\times J$ et tout vecteur $x_k\in E_k$. Maintenant, considérons un vecteur $(x_j)_{j\in J}$ de $E=\bigoplus\limits_{j\in J}E_j$. Alors, par définition, l'ensemble des indices j tels que $x_j\neq 0$ est fini. Du reste,

$$U(x)=\Big(\mathrm{Pr}_\ell[U(x)]\Big)_{\ell\in I}=\Big([\mathrm{Pr}_\ell\circ U](x)\Big)_{\ell\in I}\qquad\text{et}\qquad x=\sum_{k\in J}\mathrm{In}_k(x_k).$$

Il en résulte que

$$U(x)=\left([\mathrm{Pr}_\ell\circ U]\left(\sum_{k\in J}\mathrm{In}_k(x_k)\right)\right)_{\ell\in I}=\left(\sum_{k\in J}(\mathrm{Pr}_\ell\circ U\circ\mathrm{In}_k)(x_k)\right)_{\ell\in I}=0.$$

Ainsi, $U(x)=0$ pour tout vecteur x de E. D'où $U=0$. Le noyau de l'application linéaire Φ est donc réduit au vecteur nul de $\mathscr{L}(E,F)$. Par conséquent, l'application Φ est injective.

Surjectivité de l'application Φ

Soit $W=(W_{\ell,k})_{(\ell,k)\in I\times J}$ un élément de $\prod\limits_{(\ell,k)\in I\times J}\mathscr{L}(E_k,F_\ell)$. Alors, pour tout $k\in J$, la famille $(W_{\ell,k})_{\ell\in I}$ est un élément de $\prod\limits_{\ell\in I}\mathscr{L}(E_k,F_\ell)$. Donc, selon la *propriété universelle de l'espace vectoriel produit*, il existe une application linéaire U_k de E_k dans $F=\prod\limits_{i\in I}F_i$ telle que $\mathrm{Pr}_\ell\circ U_k=W_{\ell,k}$ pour tout $\ell\in I$. Nous obtenons ainsi un élément $(U_k)_{k\in J}$ de $\prod\limits_{k\in J}\mathscr{L}(E_k,F)$. Alors, en vertu de la *propriété universelle des sommes directes*, il existe une application linéaire U de $E=\bigoplus\limits_{j\in J}E_j$ dans F telle que $U_k=U\circ\mathrm{In}_k$ pour tout $k\in J$. Il en découle que

$$\mathrm{Pr}_\ell\circ U\circ\mathrm{In}_k=W_{\ell,k}$$

pour tout couple $(\ell,k)\in I\times J$. D'où

$$W=(W_{\ell,k})_{(\ell,k)\in I\times J}=(\mathrm{Pr}_\ell\circ U\circ\mathrm{In}_k)_{(\ell,k)\in I\times J}=\Phi(U)$$

De ce fait, tout élément de $\prod\limits_{(\ell,k)\in I\times J}\mathscr{L}(E_k,F_\ell)$ a un antécédent par l'application Φ. Cette dernière est par conséquent surjective. $\square$

2. Cas particuliers

Dans cette section, nous établissons deux corollaires de la proposition précédente.

Corollaire 1.

Soit $(E_j)_{j\in J}$ une famille d'espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, et F un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Alors, l'application $U \mapsto (U \circ \mathrm{In}_j)_{j\in J}$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathscr{L}\left(\bigoplus_{j\in J} E_j, F\right)$ sur l'espace vectoriel $\prod_{j\in J} \mathscr{L}(E_j, F)$.

Démonstration :

Soit $I = \{0\}$ et $F_0 = F$. Alors, $\prod_{i\in I} F_i = F$ et Pr_0 est l'application identique de F. D'où

$$(\mathrm{Pr}_i \circ U \circ \mathrm{In}_j)_{(i,j)\in I\times J} = (\mathrm{Pr}_0 \circ U \circ \mathrm{In}_j)_{j\in J} = (U \circ \mathrm{In}_j)_{j\in J}.$$

Le résultat se déduit alors directement de la proposition démontrée ci-dessus. $\square$

Corollaire 2.

Soit J un ensemble non vide, et F un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On note $(e_j)_{j\in J}$ la base canonique de $\mathbb{K}^{(J)}$. Alors, l'application $U \mapsto \big(U(e_j)\big)_{j\in J}$ est un isomorphisme, dit **canonique**, de l'espace vectoriel $\mathscr{L}\left(\mathbb{K}^{(J)}, F\right)$ sur l'espace vectoriel F^J.

Démonstration :

Pour tout $j \in J$, soit E_j le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$. Alors, $\bigoplus_{j\in J} E_j = \mathbb{K}^{(J)}$ et l'injection canonique In_j de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}^{(J)}$ est donnée par $\mathrm{In}_j(1) = e_j$. De ce fait, d'après le corollaire 1 ci-dessus, l'application $\Phi : U \mapsto (U \circ \mathrm{In}_j)_{j\in J}$ est un isomorphisme de $\mathscr{L}\left(\mathbb{K}^{(J)}, F\right)$ sur $\prod_{j\in J} \mathscr{L}(\mathbb{K}, F) = \mathscr{L}(\mathbb{K}, F)^J$. Cependant, l'application

$$\Gamma : (V_j)_{j\in J} \mapsto \big(V_j(1)\big)_{j\in J}$$

définit clairement un isomorphisme de $\mathscr{L}(\mathbb{K}, F)^J$ sur $\mathbb{K}^J$. Par conséquent,

$$\Gamma \circ \Phi : U \mapsto \big((U \circ \mathrm{In}_j)(1)\big)_{j\in J} = \big(U(e_j)\big)_{j\in J}$$

est un isomorphisme de $\mathscr{L}\left(\mathbb{K}^{(J)}, F\right)$ sur $\mathbb{K}^J$. $\square$

Références

[1] L. Chambadal et J.-L. Ovaert, **Algèbre linéaire et algèbre tensorielle**, Dunod, Paris, 1968.